ЭЛЕМЕНТАРНАЯ
ГЕОМЕТРІЯ

ДЛЯ СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ.

Съ приложеніемъ большого количества упражненій и статьи: главнѣйшіе методы рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе.

СОСТАВИЛЪ

А. Киселевъ.

Цѣна 1 р. 25 к.

ИЗДАНІЕ КНИЖНАГО МАГАЗИНА
В. В. ДУМНОВА
подъ фирмою
„НАСЛѢДНИКИ БРАТЬЕВЪ САЛАЕВЫХЪ."

МОСКВА.
Типо-Лит. Лашкевичъ, Знаменскій и К°. Чистые пруды, д. № 199.
1892.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРІЯ

ДЛЯ СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ.

Съ приложеніемъ большого количества упражненій и статьи: главнѣйшіе методы рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе.

СОСТАВИЛЪ

А. Киселевъ.

Цѣна 1 р. 25 к.

ИЗДАНІЕ КНИЖНАГО МАГАЗИНА
В. В. ДУМНОВА
подъ фирмою
„НАСЛѢДНИКИ БРАТЬЕВЪ САЛАЕВЫХЪ."

МОСКВА.
Типо-Лит. Лашкевичъ, Знаменскій и К°, Чистые пруды, д. № 199.
1892.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Главнѣйшія особенности предлагаемаго руководства геометріи состоятъ въ слѣдующемъ:

1. Въ большинствѣ нашихъ учебниковъ геометріи понятіе о длинѣ окружности и вообще кривой линіи принимается за элементарное, не требующее никакихъ оговорокъ и разъясненій, и выводъ, что длина окружности есть предѣлъ периметровъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ основывается на скрытомъ допущеніи или на не строго доказываемой теоремѣ, что объемлющая линія длиннѣе объемлемой. Въ предлагаемомъ руководствѣ, въ согласіи со многими авторитетами учебно-математической литературы, проведено иное воззрѣніе, которымъ признается, что понятіе о длинѣ элементарно только въ примѣненіи къ прямой; но когда рѣчь идетъ о сравненіи конечной кривой съ прямолинейнымъ отрѣзкомъ, тогда (вслѣдствіе несовмѣстимости элементовъ кривой съ элементами прямой) понятіе о длинѣ становится сложнымъ и требуетъ опредѣленія.*) Сообразно этому взгляду мы не доказываемъ, а принимаемъ за **опредѣленіе**, что длиною конечной кривой называется предѣлъ периметра вписанной ломаной линіи, когда стороны ея стремятся къ нулю. Конечно, въ среднихъ классахъ учебныхъ заведеній было бы затруднительно вполнѣ обосновать это опредѣленіе, т. е. доказать, что такой предѣлъ существуетъ и что онъ не зависитъ отъ закона вписыванія ломаной линіи; но въ педагогическомъ отношеніи, какъ намъ кажется, нѣкоторые пробѣлы въ доказательствѣ (не скрываемые, впрочемъ, отъ учащихся) не имѣютъ такого вреднаго значенія, какъ неопредѣленность, неясность и сбивчивость въ понятіяхъ, а тѣмъ болѣе въ основныхъ. При повтореніи геометріи въ старшемъ классѣ (особенно въ реальныхъ училищахъ, гдѣ

*) Отсылаемъ интересующихся этимъ вопросомъ къ статьѣ *М. Попруженко* „О длинѣ", помѣщенной въ „Вѣстникѣ оп. физики и элем. математики" (1891 г., №№ 122 и 123).

равны ихъ приближенныя значенія, вычисленныя съ произвольною, но одинаковою точностью. Принявъ это предложеніе за опредѣленіе равенства, мы не нуждаемся болѣе въ косвенномъ и тяжеломъ доказательствѣ отъ противнаго; его всегда можно замѣнить прямымъ доказательствомъ, и болѣе простымъ, и болѣе яснымъ.

5. Нѣкоторыя статьи изложены въ прилагаемомъ руководствѣ, какъ кажется, проще, чѣмъ въ распространенныхъ нашихъ учебникахъ. Таковы, напр., статьи: о параллельныхъ прямыхъ, объ относительномъ проложеніи окружностей, о пропорціанальныхъ линіяхъ, о правильныхъ многоугольникахъ, о нахожденіи объема всякаго параллелопипеда, о подобіи многогранниковъ и нѣкоторыя другія. Сравнительная простота достигается нѣкоторымъ измѣненіемъ въ распредѣленіи матеріала, а иногда упрощеніемъ пріемовъ доказательства.

Кромѣ указанныхъ главнѣйшихъ особенностей читатель встрѣтитъ въ этой книгѣ и нѣкоторыя другія. Отступая мѣстами отъ обычнаго пріема изложенія, мы стремились или упростить доказательства, или сократить количество запоминаемаго матеріала, или облегчить усвоеніе предмета во всей его цѣлости. Изложеніе нѣкоторыхъ теоремъ существенно измѣнено (напр., теорема Птоломея); теоремы, близкія другъ къ другу по ихъ логической связи или по общности доказательства, соединены въ одну группу. Нѣкоторыя обыкновенно помѣщаемыя въ руководствахъ теоремы отнесены нами къ упражненіямъ, или выпущены совсѣмъ, какъ не имѣющія примѣненія въ логической цѣпи другихъ теоремъ и не представляющія самостоятельнаго интереса (напр., обратная теорема о вертикальныхъ углахъ, или случай равенства прямоугольныхъ треугольниковъ по катету и противолежащему острому углу). Съ цѣлью облегчить учащимся усвоеніе распредѣленія матеріала мы сочли полезнымъ вездѣ, гдѣ возможно, давать той или другой группѣ теоремъ соотвѣтствующій заголовокъ, указывающій на характеръ теоремъ этой группы.

Замѣтимъ еще, что относительно обратныхъ теоремъ, слѣдуя нѣкоторымъ французскимъ учебникамъ, мы стремились провести идею — что «если въ теоремѣ или рядѣ теоремъ

разсмотрѣны всевозможные случаи, которые могутъ представиться относительно величины или расположенія нѣкоторыхъ частей фигуры, причемъ оказалось, что въ различныхъ случаяхъ получаются различные выводы относительно величины или расположенія другихъ частей фигуры, то можемъ утверждать à priori, что обратныя предложенія вѣрны». Освоившись съ этимъ логическимъ принципомъ, учащіеся во многихъ случаяхъ могутъ сами составлять и доказывать обратныя предложенія безъ помощи учителя и учебника.

Книга снабжена значительнымъ количествомъ упражненій, состоящихъ частію изъ нѣкоторыхъ не вошедшихъ въ текстъ, но представляющихъ интересъ теоремъ, а главнымъ образомъ изъ задачъ на построеніе и вычисленіе. Въ концѣ планиметріи мы помѣстили*) нѣкоторыя задачи на вычисленіе изъ *«Сборника геометрическихъ задачъ для повторительнаго курса планиметріи»* г. М. Попруженко (Воронежъ, 1891 г.). Эти задачи обладаютъ прежде всего тѣмъ достоинствомъ, что онѣ содержатъ много чисто *геометрическаго* матеріалу, а не представляютъ собоюто̀лько ариѳметическихъ или алгебраическихъ упражненій съ геометрическими данными. Въ концѣ курса, въ видѣ дополненія, мы сочли не лишнимъ приложить небольшую статью *о методахъ рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе* съ примѣрами задачъ, рѣшаемыхъ этими методами. Существующіе у насъ сборники подобнаго рода, устрашая учащихся своимъ объемомъ, употребляются ими лишь въ рѣдкихъ случаяхъ. Мы изложили въ самомъ сжатомъ видѣ только главнѣйшіе методы и помѣстили наиболѣе типичныя задачи.

Слѣдуя учебнымъ планамъ гимназій и реальныхъ училищъ, мы помѣщаемъ основныя задачи на построеніе и вычисленіе въ самомъ текстѣ книги непосредственно послѣ тѣхъ теоремъ, на которыхъ основано ихъ рѣшеніе. Въ сокращенномъ видѣ мы указываемъ также сущность приложенія алгебры къ геометріи и построеніе простѣйшихъ алгебраическихъ формулъ.

Считаемъ не лишнимъ сдѣлать слѣдующее замѣчаніе. Съ

*) съ согласія составителя.

точки зрѣнія строгой теоріи къ задачамъ на построеніе возможно приступать только тогда, когда ученики усвоили основныя предложенія объ окружности. Но съ педагогической точки зрѣнія это едва ли было бы удобно: отодвинуть практическія упражненія такъ далеко отъ начала курса значило бы сдѣлать начало геометріи, и безъ того трудное для начинающихъ, еще болѣе сухимъ и тяжелымъ. Мы поступились строгостью въ пользу практическаго интереса и помѣстили основныя задачи на построеніе тотчасъ послѣ разсмотрѣнія свойствъ треугольниковъ.

Книга напечатана двумя шрифтами: въ обыкновенномъ изложено все то, что должно быть пройдено въ среднихъ классахъ, въ мелкомъ — то, что желательно дополнить при повтореніи геометріи въ старшемъ классѣ. Не желая расширять объема учебника, мы не помѣстили въ немъ ничего такого, что не входило бы въ программы или гимназій, или реальныхъ училищъ.

При составленіи этого руководства мы пользовались, какъ пособіемъ, кромѣ извѣстныхъ оригинальныхъ и переводныхъ учебниковъ на русскомъ языкѣ, еще слѣдующими сочиненіями

Rouché et Comberousse — Éléments de géométrie (quatrième ed., 1888);

Тѣхъ же авторовъ — Traité de géométrie (cinquième ed.);

Vacquant — Cours de géométrie (deuxième ed.);

Bourget — Cours de géométrie (Sixième ed.);

Baer — Éléments de géométrie plane (1887);

Tombeck — Traité de géométrie (13-e ed., 1890);

Compagnon — Éléments de géométrie (seconde ed.);

Houel — Essai critique sur les principes fondamentaux de géométrie élémentaire;

H. Schotten — Jnhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts (1890);

Rausenberger (Otto) — die Elementargeometrie des Punctes, der Geraden und der Ebene (1887);

и нѣкоторыми другими.

Харьковъ, 8 марта 1892 г. **А. Киселевъ.**

ВВЕДЕНІЕ.

Математическія предложенія.

1. Во всякой математической наукѣ могутъ встрѣтиться слѣдующія предложенія:

Опредѣленія. Такъ называютъ предложенія, въ которыхъ разъясняется, какой смыслъ придаютъ тому или другому названію. Наприм., въ ариѳметикѣ мы встрѣчаемъ опредѣленія наименьшаго кратнаго, общаго наибольшаго дѣлителя и т. п.

Аксіомы. Такъ называютъ истины, которыя, вслѣдствіе своей очевидности, принимаются безъ доказательства. Таковы, напр., предложенія:

Если двѣ величины равны порознь одной и той же третьей величинѣ, то онѣ равны и между собою.

Если къ равнымъ величинамъ придадимъ поровну, или отъ равныхъ величинъ отнимемъ поровну, то равенство не нарушится.

Если къ неравнымъ величинамъ придадимъ поровну, или отъ неравныхъ величинъ отнимемъ поровну, то смыслъ неравенства не измѣнится, т.-е. бо́льшая величина останется бо́льшей.

Теоремы. Такъ называются предложенія, которыхъ истинность обнаруживается только послѣ нѣкотораго разсужденія (доказательства). Примѣромъ можетъ служить ариѳметическая истина: „если сумма цыфръ дѣлится на 9, то число дѣлится на 9".

Слѣдствія. Такъ наз. предложенія, которыя составляютъ непосредственный выводъ изъ аксіомы или теоремы. Напр., изъ теоремы: „въ геометрической пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ“ выводится слѣдствіе: „крайній членъ равенъ произведенію среднихъ, дѣленному на другой крайній“.

2. Составъ теоремы. Во всякой теоремѣ можно различить двѣ части: условіе и заключеніе. *Условіе* выражаетъ то, что предполагается даннымъ; *заключеніе* содержитъ въ себѣ то, что требуется доказать. Напр., въ теоремѣ: „если сумма цыфръ дѣлится на 9, то число дѣлится на 9“, условіемъ служитъ первая часть теоремы: „*если* сумма цыфръ дѣлится на 9“, а заключеніемъ — вторая часть: „*то* число дѣлится на 9;“ другими словами, намъ дано, что сумма цыфръ дѣлится на 9, а требуется доказать, что въ такомъ случаѣ и число дѣлится на 9.

Условіе и заключеніе теоремы могутъ иногда состоять изъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ условій и заключеній; напр., въ теоремѣ: „*если число дѣлится на 2 и на 3*, то оно раздѣлится на 6“, условіе состоитъ изъ двухъ частей: если число дѣлится на 2 и если число дѣлится на 3.

Полезно замѣтить, что всякую теорему можно подробно выразить такъ, что ея условіе будетъ начинаться словомъ „*если*“, а заключеніе — словомъ „*то*“.

3. Обратная теорема. Теоремою, обратною данной теоремѣ, наз. такая, въ которой условіемъ поставлено заключеніе или часть заключенія данной теоремы, а заключеніемъ — условіе или часть условія данной теоремы. Напр., слѣдующія двѣ теоремы будутъ обратны другъ другу:

Если сумма цыфръ дѣлится на 9, *то* число дѣлится на 9.	*Если* число дѣлится на 9, *то* сумма цыфръ дѣлится на 9.

Если одну изъ этихъ теоремъ назовемъ *прямою*, то другую слѣдуетъ назвать *обратною*.

Въ этомъ примѣрѣ обѣ теоремы: и прямая, и обратная, оказываются вѣрными. Но не должно думать, что такъ бываетъ всегда. Напр., теорема: „если каждое слагаемое дѣлится на одно и то же число, то и сумма раздѣлится на то же число“ — вѣрна, но невѣрно обратное предложеніе: „если сумма дѣлится на какое-нибудь число, то и каждое слагаемое раздѣлится на него“.

4. Противоположная теорема. Теоремою, противоположной данной теоремѣ, наз. такая, которой условіе и заключеніе представляютъ *отрицаніе* условія и заключенія данной теоремы. Напр., теоремѣ: „если сумма цыфръ дѣлится на 9, то число дѣлится на 9“ сооотвѣтствуетъ такая противоположная: „если сумма цыфръ *не* дѣлится на 9, то число *не* дѣлится на 9“.

И здѣсь должно замѣтить, что вѣрность прямой теоремы еще не служитъ доказательствомъ вѣрности противоположной: напр., противоположное предложеніе: „если каждое слагаемое *не* дѣлится на одно и то же число, то и сумма *не* раздѣлится на это число“ — не вѣрно, тогда какъ прямое предложеніе вѣрно.

5. Зависимость между теоремами: прямой, обратной и противоположной. Для лучшаго уясненія этой зависимости выразимъ теоремы сокращенно такъ:

1⁰. *Прямая:* если есть A, то есть и B.
2⁰. *Обратная:* если есть B, то есть и A.
3⁰. *Противоположная прямой:* если нѣтъ A, то нѣтъ и B.
4⁰. *Противоположная обратной:* если нѣтъ B, то нѣтъ и A.

Разсматривая эти предложенія, легко замѣтимъ, что первое изъ нихъ находится въ такомъ же отношеніи къ четвертому, какъ второе къ третьему, а именно: предложенія первое и четвертое обратимы одно въ другое, равно какъ второе и третье. Дѣйствительно, изъ предложенія: „если есть A, то есть и B“ непосредственно слѣдуетъ: „если нѣтъ B, то нѣтъ и A“ (такъ какъ, если бы A было, то, согласно первому предложенію, было бы и B); обратно, изъ предложенія: „если нѣтъ B, то нѣтъ и A“ выводимъ: „если есть A, то есть и B (такъ какъ, если бы B не было, то не было бы и A). Совершенно такъ же убѣдимся, что изъ второго предложенія слѣдуетъ третье, и наоборотъ.

Вслѣдствіе этого, для того, чтобы имѣть увѣренность въ справедливости всѣхъ четырехъ теоремъ, нѣтъ надобности доказывать каждую изъ нихъ отдѣльно, а достаточно ограничиться доказательствомъ только двухъ: прямой и обратной, или прямой и противоположной.

Прямая линія, плоскость. Понятіе о геометріи.

6. Геометрическія фигуры. Часть пространства, занимаемая какимъ-нибудь предметомъ, называется *геометрическимъ тѣломъ,* или просто *тѣломъ*.

То, чѣмъ ограничено тѣло отъ остальнаго пространства, называется *поверхностью*.

Граница, отдѣляющая одну часть поверхности отъ другой, называется *линіей*.

Граница, отдѣляющая одну часть линіи отъ другой, называется *точкой*.

Тѣло, поверхность, линія и точка не существуютъ въ природѣ раздѣльно. Однако, при помощи отвлеченія, мы можемъ разсматривать геометрическое тѣло независимо отъ матеріальнаго предмета, поверхность—независимо отъ тѣла, линію—независимо отъ поверхности и точку—независимо отъ линіи.

Совокупность какихъ бы то ни было точекъ, линій, поверхностей или тѣлъ, расположенныхъ извѣстнымъ образомъ въ пространствѣ, называется вообще *фигурой*.

7. Геометрія. Наука, разсматривающая свойства фигуръ, наз. *геометріей*, что въ переводѣ съ греческаго языка означаетъ *землемѣріе*. Такое названіе этой наукѣ дано было потому, что въ древнее время главною цѣлью геометріи было измѣреніе разстояній на земной поверхности.

8. Въ самомъ началѣ геометріи должно быть указано слѣдующее общее свойство фигуръ:

Аксіома пространства. *Всякую фигуру можно перенести изъ одного мѣста пространства въ какое угодно другое, не нарушая ни величины составляющихъ фигуру частей, ни ихъ взаимнаго расположенія.*

9. Прямая линія. Всякій знаетъ, что такое *прямая линія*, или просто *прямая*, представленіе о которой намъ даетъ туго натянутая нить. Понятіе о прямой *элементарно*, т.-е. оно не можетъ быть опредѣлено посредствомъ другихъ болѣе простыхъ понятій.

Прямая линія обладаетъ слѣдующими основными свойствами:

Аксіомы прямой. 1°. *Черезъ всякія двѣ точки пространства можно провести прямую и притомъ только одну.*

2°. *Прямую можно продолжать безъ конца въ обѣ стороны отъ каждой ея точки.*

3°. *Если двѣ прямыя имѣютъ только одну общую точку, то онѣ пересѣкаются, т.-е. каждая изъ нихъ располагается по обѣ стороны другой.*

Изъ первой аксіомы непосредственно слѣдуетъ:

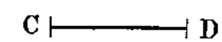
Двѣ прямыя, будучи наложены одна на другую такъ, что двѣ точки одной прямой совпадаютъ съ двумя точками другой прямой, *сливаются* и во всѣхъ остальныхъ точкахъ (потому что въ противномъ случаѣ черезъ двѣ точки можно было бы провести двѣ различныя прямыя, что противорѣчитъ аксіомѣ первой).

По той же причинѣ двѣ прямыя могутъ пересѣчься только *въ одной точкѣ*.

На чертежѣ прямую изображаютъ въ видѣ тонкой черты, проведенной отъ руки или помощью *линейки* черезъ какія-нибудь двѣ точки прямой.

10. Прямая конечная и безконечная. Если прямую представляютъ продолженною въ обѣ стороны безконечно, то ее называютъ *безконечною* или *неопредѣленною* прямой. Такую прямую обозначаютъ обыкновенно двумя буквами, поставленными у двухъ какихъ-нибудь ея точекъ. Такъ, говорятъ: „прямая AB или BA“ (черт. 1).

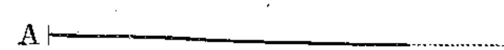
Черт. 1



Черт. 2

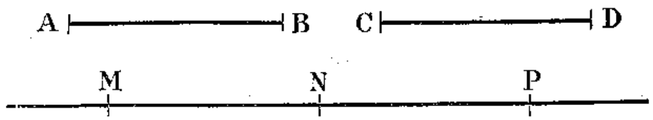
Часть прямой, ограниченная съ обѣихъ сторонъ, наз. *конечною* прямой, или *отрѣзкомъ* прямой; такая прямая обозначается двумя буквами, поставленными у концовъ ея (отрѣзокъ CD, черт. 2). Отрѣзокъ прямой, соединяющій двѣ точки, наз. *разстояніемъ* между ними.

Иногда разсматриваютъ прямую, ограниченную только съ одной стороны, напр. въ точкѣ A (черт. 3). О такой прямой говорятъ, что она *исходитъ* изъ точки A.



Черт. 3

11. Равенство конечныхъ прямыхъ. Два отрѣзка прямой считаются равными, если они при наложеніи совмѣщаются.



Черт. 4

Положимъ, напр., что мы накладываемъ отрѣзокъ AB на CD (черт. 4) такъ, чтобы точка A упала въ C и чтобы прямая AB пошла по CD; если при этомъ концы B и D совпадутъ, то $AB = CD$; въ противномъ случаѣ отрѣзки считаются не равными, причемъ меньшимъ будетъ тотъ, который составитъ только часть другого.

Чтобы на какой-нибудь прямой отложить отрѣзокъ, равный данному отрѣзку, употребляютъ *циркуль*—приборъ, извѣстный учащимся изъ опыта.

12. Сумма конечныхъ прямыхъ. Суммою нѣсколькихъ данныхъ отрѣзковъ прямой наз. такой новый отрѣзокъ прямой, который составленъ изъ частей, соотвѣтственно равныхъ даннымъ отрѣзкамъ. Положимъ, напр., требуется найти сумму двухъ отрѣзковъ AB и CD (черт. 4). Для этого на какой-нибудь неопредѣленной прямой беремъ произвольную точку M и откладываемъ отъ нея часть MN, равную AB, затѣмъ отъ точки N въ томъ же направленіи откладываемъ часть NP, равную CD. Отрѣзокъ MP будетъ сумма данныхъ отрѣзковъ AB и CD. Подобнымъ образомъ можно получить сумму трехъ и болѣе отрѣзковъ.

Изъ понятія о суммѣ выводятся понятія о разности, произведеніи и частномъ отрѣзковъ. Такъ, *разность* отрѣзковъ AB и CD есть третій отрѣзокъ, котораго сумма съ CD образуетъ AB; *произведеніе* отрѣзка AB на отвлеченное число 3 есть сумма трехъ отрѣзковъ, изъ которыхъ каждый равенъ AB; и т. п.

13. Плоскость. Такъ наз. поверхность, обладающая тѣмъ свойствомъ, что *прямая, проходящая черезъ какія-нибудь двѣ точки этой поверхности, лежитъ въ ней всѣми остальными*

своими точками. Положимъ, напр., мы желаемъ убѣдиться, будетъ ли плоскостью поверхность стола. Для этого беремъ хорошо вывѣренную линейку и прикладываемъ ее въ различныхъ направленіяхъ къ поверхности стола такъ, чтобы какія-нибудь двѣ точки линейки лежали на этой поверхности. Если при этомъ окажется, что, въ какомъ бы направленіи мы линейку ни приложили, всѣ остальныя точки ея будутъ лежать на поверхности стола, то эта поверхность есть плоскость.

Укажемъ еще слѣдующее свойство плоскости, которое мы примемъ здѣсь безъ доказательства *):

Всякую часть плоскости можно наложить всѣми ея точками на другое мѣсто этой или другой плоскости, причемъ накладываемую часть можно предварительно перевернуть другою стороною.

14. Раздѣленіе геометріи. Геометрія раздѣляется на двѣ части: геометрія на плоскости или *планиметрія,* и геометрія въ пространствѣ или *стереометрія.* Первая разсматриваетъ свойства такихъ фигуръ, которыя всѣ размѣщены въ одной плоскости; вторая—свойства такихъ фигуръ, которыя не помѣщаются въ одной плоскости.

*) Доказательство излагается въ началѣ курса стереометріи.

ПЛАНИМЕТРІЯ.

КНИГА I.

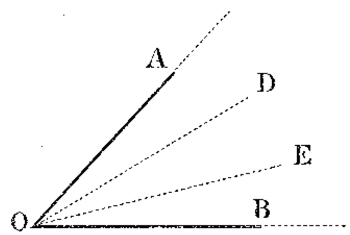
ПРЯМАЯ ЛИНІЯ.

ГЛАВА I.

Углы.

Предварительныя понятія.

15. Опредѣленія. Когда двѣ прямыя (OA и OB, черт. 5) исходятъ изъ одной точки, то онѣ образуютъ то, что наз. *угломъ.* Прямыя, образующія уголъ, наз. *сторонами,* а точка, изъ которой онѣ исходятъ, — *вершиною* угла. Стороны должно представлять себѣ продолженными отъ вершины неопредѣленно.



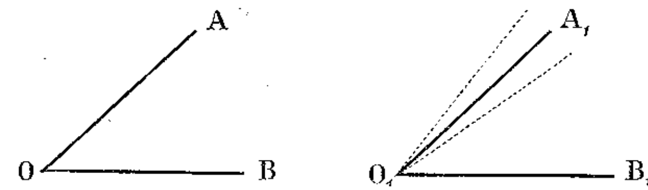
Черт. 5

Уголъ обыкновенно обозначается тремя буквами, изъ которыхъ средняя ставится у вершины, а крайнія у какихъ-нибудь точекъ сторонъ; напр., говорятъ: „уголъ AOB или уголъ BOA (черт. 5)". Но можно обозначать уголъ и одною буквою, поставленною у вершины, если при этой вершинѣ нѣтъ другихъ угловъ. Мы иногда будемъ обозначать уголъ цыфрою, поставленною внутри угла, около вершины.

Если изъ вершины угла (черт. 5) проведемъ внутри его какія-нибудь прямыя OD, OE,..., то образовавшіеся при этомъ углы AOD, DOE, EOB... разсматриваются, какъ *части* угла AOB.

Слово „уголъ" на письмѣ замѣняется иногда знакомъ $\angle$.

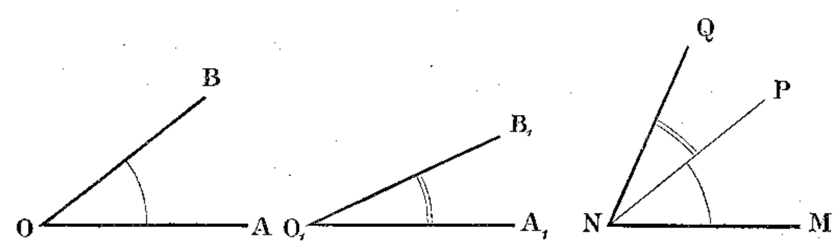
16. Равенство угловъ. Два угла считаются равными или неравными, смотря по тому, совмѣщаются ли они при наложеніи или нѣтъ. Положимъ, напр., что мы накладываемъ уголъ AOB на уголъ $A_1O_1B_1$ (черт. 6) такъ, чтобы вершина O упала въ O_1, прямая OB пошла по O_1B_1 и чтобы углы покрыли другъ друга. Если при этомъ сторона OA со-



Черт. 6

вмѣстится съ O_1A_1, то углы равны; если же OA пойдетъ внутри угла $A_1O_1B_1$, или внѣ его, то углы не равны, причемъ тотъ изъ нихъ будетъ меньше, который составитъ часть другого угла.

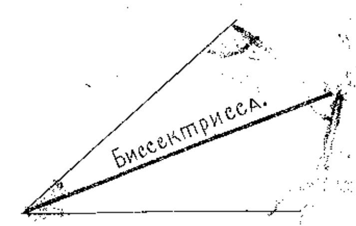
17. Сумма угловъ. Суммою двухъ угловъ AOB и $A_1O_1B_1$ (черт. 7) наз. такой уголъ MNQ, который составленъ изъ



Черт. 7

частей, соотвѣтственно равныхъ угламъ AOB и $A_1O_1B_1$. Подобнымъ образомъ можетъ быть составлена сумма трехъ и болѣе угловъ.

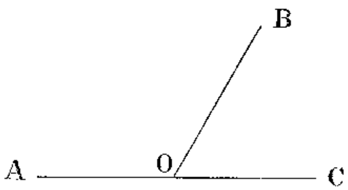
Изъ понятія о суммѣ угловъ выводятся понятія объ ихъ разности, произведеніи и частномъ. Замѣтимъ, что прямая, дѣлящая уголъ пополамъ, наз. *биссектриссою* угла (черт. 8).



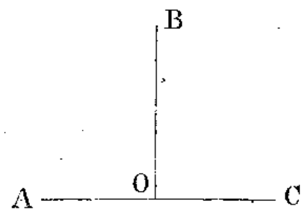
Черт. 8

Свойства прямого угла.

18. Опредѣленія. Два угла (AOB и BOC, черт. 9) наз. *смежными,* если одна сторона у нихъ общая, а двѣ другія стороны составляютъ продолженіе одна другой. Когда



Черт. 9



Черт. 10

два смежные угла равны (черт. 10), то общая ихъ сторона OB наз. *перпендикуляромъ* къ прямой AC, на которой лежатъ другія стороны; если же смежные углы неравны (черт. 9), то OB наз. *наклонною* къ AC. Въ томъ и другомъ случаѣ точка O наз. *основаніемъ* (перпендикуляра или наклонной)

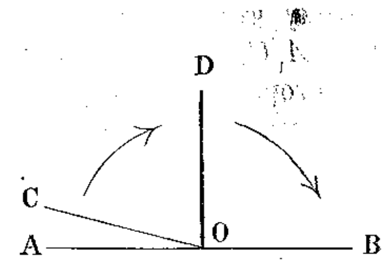
Каждый изъ равныхъ смежныхъ угловъ наз. прямымъ.

Говорятъ: „*возставить* къ прямой перпендикуляръ", если этотъ перпендикуляръ приходится проводить черезъ точку, взятую на прямой, и „*опустить* на прямую перпендикуляръ", если онъ проводится черезъ точку, взятую внѣ прямой. Говорятъ: „перпендикуляръ *къ срединѣ* прямой", разумѣя подъ этимъ перпендикуляръ къ конечной прямой, проведенный черезъ ея средину.

Что смежные углы могутъ быть равны, видно изъ слѣдующей теоремы.

19. Теорема. *Изъ всякой точки прямой можно, по ту и другую сторону отъ этой прямой, возставить къ ней перпендикуляръ и притомъ только одинъ.*

Пусть дана какая-нибудь прямая AB (черт. 11) и на ней произвольная точка O. Требуется доказать: во 1) что изъ этой точки можно, по каждую сторону отъ прямой AB, напр. по верхнюю, возставить къ AB перпендикуляръ, и во 2), что этотъ перпендикуляръ можетъ быть только одинъ.

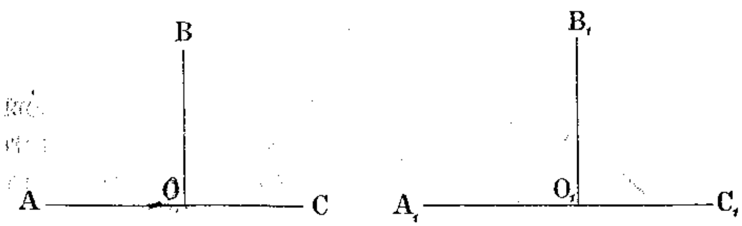


Черт. 11

Для доказательства проведемъ изъ точки O прямую OC, почти сливающуюся съ OA, и затѣмъ станемъ ее вращать вокругъ точки O въ направленіи, указанномъ на чертежѣ стрѣлкою, приближая OC все болѣе и болѣе къ OB. Тогда $\angle COA$ будетъ непрерывно увеличиваться, а $\angle COB$ непрерывно уменьшаться, причемъ послѣдній уголъ можетъ быть сдѣланъ такъ малъ, какъ угодно. Изъ этого слѣдуетъ, что при вращеніи прямая OC можетъ занять такое положеніе OD, при которомъ углы AOD и DOB окажутся равными; тогда OD и будетъ перпендикуляромъ къ AB. Такъ какъ при всякомъ иномъ положеніи вращающейся прямой OC равенство между смежными углами нарушается, то другого перпендикуляра къ AB изъ точки O возставить нельзя, по крайней мѣрѣ по ту же сторону отъ AB, по какой лежитъ перпендикуляръ OD.

20. Теорема. *Всѣ прямые углы равны между собою.*

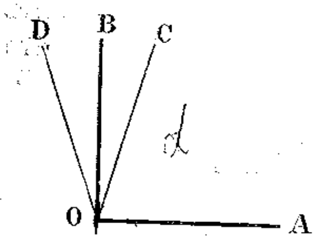
Пусть смежные углы при вершинахъ O и O_1 (черт. 12) будутъ *прямые,* т.-е. $\angle AOB = \angle BOC$ и $\angle A_1O_1B_1 = \angle B_1O_1C_1$. Требуется доказать, что прямые углы первой пары равны прямымъ угламъ второй пары.



Черт. 12

Наложимъ фигуру $AOBC$ на фигуру $A_1O_1B_1C_1$ такъ, чтобы точка O упала въ O_1, прямая AC пошла по A_1C_1, и чтобы прямая OB упала по ту же сторону отъ A_1C_1, по которой расположена O_1B_1. Тогда OB совпадетъ съ O_1B_1, потому что въ противномъ случаѣ изъ одной точки O_1 прямой A_1C_1 можно было бы возставить къ ней, по одну и ту же сторону, два перпендикуляра, что, по доказанному выше, невозможно. Если же прямыя OB и O_1B_1 совпадутъ, то это значитъ, что $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ и $\angle COB = \angle C_1O_1B_1$, что и требовалось доказать.

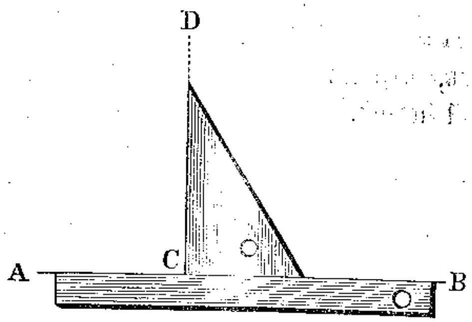
21. Опредѣленія. Изъ доказанной теоремы слѣдуетъ, что прямой уголъ представляетъ собою *постоянную* величину (ее обыкновенно обозначаютъ знакомъ d, т.-е. начальною буквою франц. слова *droit, прямой*). Вслѣдствіе этого другіе углы сравниваютъ по величинѣ съ прямымъ угломъ.



Черт. 13

Всякій уголъ AOC (черт. 13), меньшій прямого угла AOB, наз. *острымъ*, а всякій уголъ AOD, большій прямого, наз. *тупымъ*.

22. Черченіе прямого угла. Прямой уголъ легко начертить помощью прибора, называемаго *наугольникомъ*, у котораго одинъ изъ трехъ угловъ дѣлается прямымъ. Чтобы начертить прямой уголъ при точкѣ C прямой AB (черт. 14), приставляютъ къ этой прямой линейку, а къ линейкѣ наугольникъ, какъ указано на чертежѣ, и двигаютъ наугольникъ вдоль линейки до тѣхъ поръ, пока вершина прямого угла не совпадетъ съ точкой C. Остается затѣмъ провести по сторонѣ прямого угла прямую CD.



Черт. 14

23. Доказательство наложеніемъ. Пріемъ доказательства, которымъ мы пользовались въ § **20**, весьма часто употребляется въ геометріи для обнаруженія равенства или неравенства фигуръ. Онъ извѣстенъ подъ именемъ *доказательства наложеніемъ*. Замѣтимъ, что наложеніе одной плоской фигуры на другую всегда можно выполнить въ такой послѣдовательности:

1°. Мы можемъ любую *точку* одной фигуры совмѣстить съ любою *точкою* другой фигуры; напр. (черт. 12) точку O съ O_1.

2°. По совмѣщеніи двухъ точекъ мы можемъ, вращая накладываемую фигуру вокругъ совпавшей точки, совмѣстить въ обѣихъ фигурахъ любыя двѣ *прямыя*, исходящія изъ совпавшихъ точекъ; напр. (черт. 12) прямую OC съ O_1C_1.

3°. По совмѣщеніи двухъ точекъ и двухъ прямыхъ мы можемъ, вращая накладываемую фигуру вокругъ совпавшей прямой, какъ около оси, расположить эту фигуру или по ту, или по другую сторону отъ совпавшей прямой. Напр. (черт. 12) по совмѣщеніи точекъ O и O_1 и прямыхъ OC и O_1C_1, мы можемъ расположить фигуру $AOBC$ или такъ, что прямая OB пойдетъ къ верху отъ O_1C_1, или же къ низу отъ нея (въ послѣднемъ случаѣ будетъ такъ называемое *приложеніе* фигуры).

Послѣ этого нашъ произволъ заканчивается; совпадутъ ли другія части фигуръ, зависитъ отъ свойствъ самихъ фигуръ.

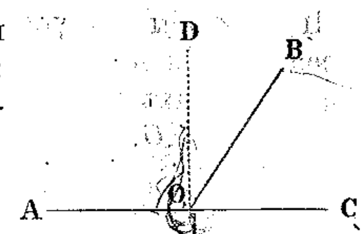
Свойства смежныхъ и вертикальныхъ угловъ.

24. Теорема. *Сумма двухъ смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ.*

Даны два смежныхъ угла: AOB и BOC; требуется доказать, что $AOB + BOC = 2d$.

Возставивъ изъ точки O къ прямой AC перпендикуляръ OD, мы разобьемъ уголъ AOB на двѣ части: AOD и DOB, такъ что можно написать:

$$AOB = AOD + DOB$$



Черт. 15

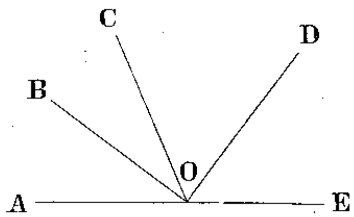
Приложимъ къ обѣимъ частямъ этого равенства по углу BOC; тогда получимъ:

$$AOB + BOC = AOD + DOB + BOC$$

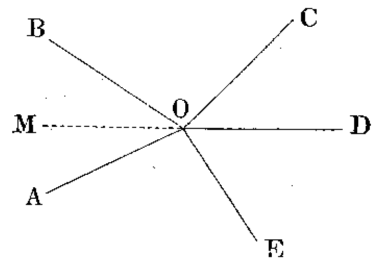
Но сумма $DOB+BOC$ составляетъ прямой уголъ DOC; слѣдовательно:

$$AOB+BOC=AOD+DOC=d+d=2d$$

25. Слѣдствія. 1°. *Сумма угловъ: AOB, BOC, COD, DOE* (черт. 16), *расположенныхъ вокругъ общей вершины O по одну сторону прямой AE, равна $2d$,*



Черт. 16



Черт. 17

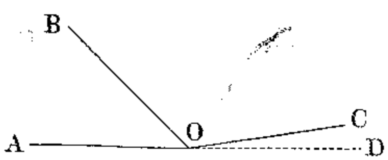
потому что эта сумма составляетъ сумму двухъ смежныхъ угловъ, напр. такихъ: $AOC+COE$.

2°. *Сумма угловъ: AOB, BOC, COD, DOE, EOA* (черт. 17), *расположенныхъ вокругъ общей вершины O по обѣ стороны какой-нибудь прямой DM, равны $4d$,*

потому что эта сумма равна $(MOB+BOC+COD)+$ $+(DOE+EOA+AOM)=2d+2d=4d$.

26. Обратная теорема. *Если сумма двухъ угловъ, имѣющихъ общую сторону и не покрывающихъ другъ друга, равна двумъ прямымъ, то такіе углы смежные, т.-е. двѣ другія стороны ихъ составляютъ продолженіе одна другой.*

Пусть даны два угла: AOB и BOC, имѣющіе общую сторону OB и не покрывающіе другъ друга; пусть, кромѣ того, сумма ихъ равна $2d$; требуется доказать, что OC есть продолженіе AO.



Черт. 18

Для доказательства допустимъ временно, что продолженіе стороны AO пойдетъ по нѣкоторому направленію OD, не сливающемуся съ OC. Посмотримъ, къ чему приведетъ насъ это допуще-

ніе. Такъ какъ углы AOB и BOD смежные, то по доказанному выше (**24**):

$$AOB+BOD=2d$$

Въ то же время, согласно условію нашей теоремы, мы имѣемъ:

$$AOB+BOC=2d$$

Правыя части этихъ двухъ равенствъ равны, слѣд. равны и лѣвыя:

$$AOB+BOD=AOB+BOC$$

Отнявъ отъ равныхъ суммъ по одному и тому же углу AOB, мы должны получить равные остатки:

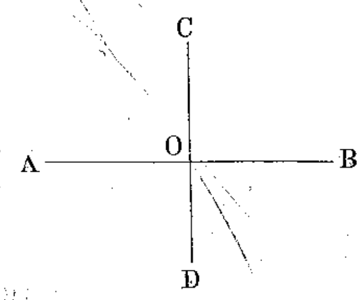
$$BOD=BOC.$$

Это равенство *невозможно*, такъ какъ изъ чертежа непосредственно видно, что $\angle BOD$ больше $\angle BOC$.

Если въ результатѣ разсужденія мы получаемъ невозможный (нелѣпый) выводъ, то это можетъ произойти отъ двухъ причинъ: или мы невѣрно разсуждали, или же мы основывались на невозможномъ допущеніи. Разсужденіе наше было правильно; значитъ, причина нелѣпаго вывода заключается въ невозможности допущенія, будто продолженіе AO *не сливается* съ OC. Если же это предположеніе невозможно, то остается только одно: *продолженіе AO есть OC* (слѣд., нашъ чертежъ сдѣланъ неправильно); что и требовалось доказать.

27. Слѣдствіе. *Если изъ одной точки O прямой AB возставимъ къ ней, по каждую ея сторону, перпендикуляры OC и OD, то эти перпендикуляры образуютъ одну прямую CD,* потому что сумма угловъ COB и BOD равна $2d$.

28. Опредѣленіе. Неопредѣленная прямая CD (черт. 19), которой части OC и OD служатъ перпендикулярами къ прямой AB, наз. *линіей, перпендикулярной къ AB.*



Черт. 19

Если CD перпендикулярна къ

AB, то и AB перпендикулярна къ CD, потому что части OA и OB служатъ также перпендикулярами къ CD. Поэтому прямыя AB и CD наз. *взаимно-перпендикулярными*.

Что двѣ прямыя AB и CD взаимно перпендикулярны, выражаютъ письменно такъ: $AB \perp CD$.

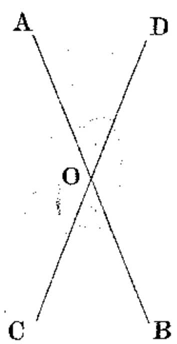
29. Доказательство отъ противнаго. Способъ доказательства, которымъ мы пользовались въ § **26**, наз. доказательствомъ *отъ противнаго*, или *приведеніемъ къ нелѣпости* (reductio ad absurdum). Первое названіе этотъ способъ получилъ потому, что въ началѣ разсужденія дѣлается предположеніе, *противное* (противоположное) тому, что требуется доказать. Приведеніемъ къ нелѣпости онъ наз. вслѣдствіе того, что, разсуждая на основаніи сдѣланнаго предположенія, мы приходимъ къ *нелѣпому выводу* (къ абсурду). Полученіе такого вывода заставляетъ насъ отвергнуть сдѣланное въ началѣ допущеніе и принять то, которое требовалось доказать.

30. Опредѣленіе. Два угла наз. *вертикальными*, если стороны одного составляютъ продолженіе сторонъ другого.

Такъ, при пересѣченіи двухъ прямыхъ AB и CD (черт. 20) образуются двѣ пары вертикальныхъ угловъ: AOD и COB, AOC и DOB.

31. Теорема. *Вертикальные углы равны.*

Пусть даны два вертикальныхъ угла: AOD и COB, т.-е. OB есть продолженіе OA, а OC продолженіе OD. Требуется доказать, что $AOD = COB$.



Черт. 20

По свойству смежныхъ угловъ можемъ написать:

$$AOD + DOB = 2d$$

$$DOB + BOC = 2d$$

Значитъ: $AOD + DOB = DOB + BOC$.

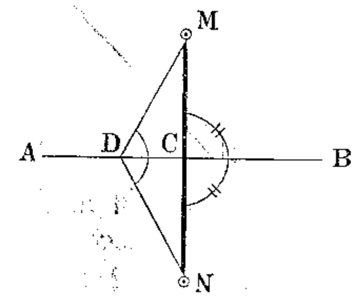
Отнявъ отъ обѣихъ частей этого равенства по углу DOB, получимъ:

$$AOD = BOC$$

Подобнымъ же образомъ докажемъ, что и $AOC = DOB$.

32. Теорема. *Изъ всякой точки внѣ прямой можно опустить на эту прямую перпендикуляръ и притомъ только одинъ.*

Пусть дана какая-нибудь прямая AB и внѣ ея произвольная точка M; требуется доказать, что во 1) изъ этой точки можно опустить на прямую AB перпендикуляръ, и во 2) что этотъ перпендикуляръ можетъ быть только одинъ.



Черт. 21

Перегнемъ чертежъ по прямой AB такъ, чтобы верхняя его часть упала на нижнюю. Тогда точка M займетъ нѣкоторое положеніе N. Отмѣтивъ это положеніе, приведемъ чертежъ въ прежній видъ и затѣмъ соединимъ точки M и N прямою. Теперь докажемъ, что прямая MN перпендикулярна къ AB, а всякая иная прямая, исходящая изъ M, напр. MD, не перпендикулярна къ AB. Для этого перегнемъ чертежъ вторично. Тогда точка M снова совмѣстится съ N, а точки C и D останутся на своихъ мѣстахъ; слѣд., прямая MC совпадетъ съ CN, а MD съ DN. Изъ этого слѣдуетъ, что $\angle MCB = \angle BCN$ и $\angle MDC = \angle CDN$. Но углы MCB и BCN смежные и, какъ теперь видимъ, равные; слѣд., каждый изъ нихъ есть прямой, а потому $MN \perp AB$. Такъ какъ линія MDN *не прямая* (между точками M и N не можетъ быть двухъ различныхъ прямыхъ), то сумма двухъ равныхъ угловъ MDC и CDN *не равна* $2d$; поэтому уголъ MDC не есть прямой, и, значитъ, MD не перпендикулярна къ AB. Такимъ образомъ, другого перпендикуляра изъ точки M на прямую AB опустить нельзя.

Замѣчаніе. Чтобы опустить перпендикуляръ на прямую изъ данной точки, можно пользоваться линейкой и наугольникомъ (см. черт. 14).

Упражненія. Доказать, что:

1. Биссектриссы двухъ вертикальныхъ угловъ составляютъ продолженіе одна другой.
2. Биссектриссы двухъ смежныхъ угловъ перпендикулярны.

3. Если при точкѣ O прямой AB (черт. 20) построимъ, по разныя стороны отъ AB, равные углы AOD и BOC, то стороны ихъ OD и OC составляютъ одну прямую.

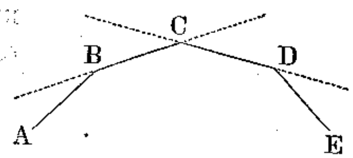
4. Если изъ точки O (черт. 20) проведемъ прямыя OA, OD, OB, OC такъ, что $\angle AOC = \angle DOB$ и $\angle AOD = \angle COB$, то OB есть продолженіе OA и OD продолженіе OC.

ГЛАВА II.

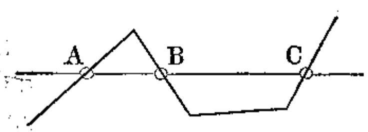
Треугольники и многоугольники.

Понятіе о многоугольникѣ и треугольникѣ.

33. Ломаная линія. Линія наз. *ломаною,* когда она состоитъ изъ отрѣзковъ прямой, не расположенныхъ на одной прямой (черт. 22 или 23). Эти отрѣзки наз. *сторонами* ломаной, а вершины угловъ, образуемыхъ сосѣдними отрѣзками, — *вершинами* ея. Ломаная линія обозначается рядомъ буквъ, поставленныхъ у ея вершинъ и концовъ.



Черт. 22



Черт. 23

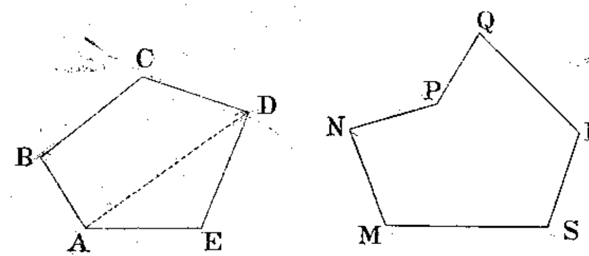
Ломаная $ABCDE$ наз. *выпуклою,* если она вся расположена по одну сторону отъ *каждаго* составляющаго ее отрѣзка, продолженнаго неопредѣленно.

Выпуклая ломаная не можетъ пересѣчься съ прямою линіей болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ. Дѣйствительно, если бы ломаная пересѣкалась съ какою-нибудь прямою въ трехъ точкахъ A, B и C (черт. 23), то она была бы расположена по разныя стороны того отрѣзка, который проходитъ черезъ среднюю точку B; значитъ, такую ломаную нельзя было бы назвать выпуклою.

Когда концы ломаной сходятся въ одну точку, то она наз. *замкнутой.*

Сумма всѣхъ сторонъ ломаной наз. ея *периметромъ* или *длиной.*

34. Многоугольникъ. Часть плоскости, ограниченная замкнутою ломаной линіей, наз. *многоугольникомъ* (черт. 24). Стороны этой ломаной наз. *сторонами* многоугольника, углы, составленные каждыми двумя сосѣдними сторонами, — *углами* многоугольника, а ихъ вершины — *вершинами* его.



Черт. 24

Многоугольникъ наз. *выпуклымъ,* если онъ ограниченъ выпуклою ломаною линіей. Таковъ, напр., многоуг. $ABCDE$ (черт. 24); но нельзя назвать выпуклымъ многоуг. $MNPQRS$ (тотъ же черт.).

Всякая прямая AD, которая соединяетъ вершины двухъ угловъ многоугольника, не прилежащихъ къ одной сторонѣ, наз. *діагональю.*

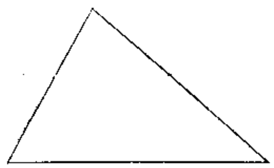
Сумма сторонъ многоугольника наз. *периметромъ* его.

Два многоугольника, какъ и вообще двѣ какія-нибудь геометрическія фигуры, считаются *равными,* если они при наложеніи совмѣщаются.

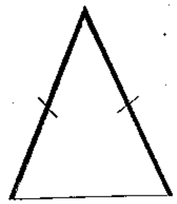
Наименьшее число сторонъ въ многоугольникѣ *три.* По числу сторонъ многоугольникъ наз. *треугольникомъ, четыреугольникомъ, пятиугольникомъ* и т. д.

35. Раздѣленіе треугольниковъ. Треугольники раздѣляются или по сторонамъ, или по угламъ. Относительно сторонъ они бываютъ: *разносторонніе* (черт. 25), когда всѣ стороны различной длины, *равнобедренные* (черт. 26), когда двѣ стороны одинаковы, и *равносторонніе* (черт. 27), когда всѣ стороны равны.

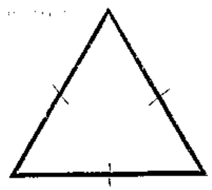
Относительно угловъ треугольники бываютъ: *остроугольные* (черт. 25), когда всѣ углы острые, *прямоугольные* (черт. 28), когда въ числѣ угловъ есть прямой, и *тупоугольные*



Черт. 25

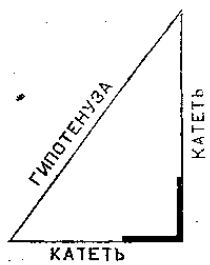


Черт. 26

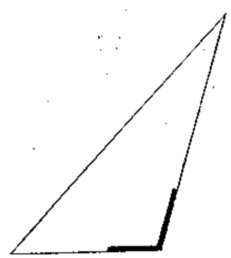


Черт. 27

(черт. 29), когда въ числѣ угловъ есть тупой. Въ прямоугольномъ треугольникѣ стороны, образующія прямой уголъ, назыв. *катетами*, а сторона, лежащая противъ прямого угла,—*гипотенузой*.



Черт. 28



Черт. 29

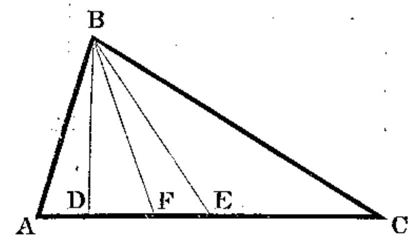
36. Главнѣйшія линіи въ треугольникѣ. Одну изъ сторонъ треугольника обыкновенно называютъ *основаніемъ*, вершину противолежащаго угла—*вершиною* тр.-ка, а перпендикуляръ, опущенный изъ вершины на основаніе или на его продолженіе, — *высотою* его. Такъ если въ тр.-кѣ ABC (черт. 30 или 31) за основаніе взята сторона AC, то B будетъ вершина, BD высота тр.-ка.

Въ равнобедренномъ тр.-кѣ основаніемъ называютъ обыкновенно сторону, не принадлежащую къ равнымъ.

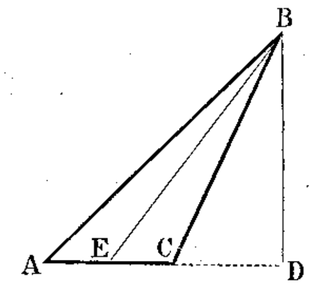
Прямая BE (черт. 30 или 31), соединяющая вершину какого-нибудь угла тр.-ка съ *срединою* противоположной сто-

роны, наз. *медіаною* (средней линіей). Прямая BF (черт. 30), дѣлящая какой-нибудь уголъ тр.-ка пополамъ, наз. *биссектриссою*.

На письмѣ слово „треугольникъ" замѣняется иногда знакомъ $\triangle$.



Черт. 30

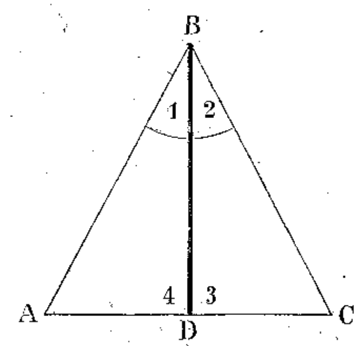


Черт. 31

Свойства равнобедреннаго треугольника.

37. Теорема. *Въ равнобедренномъ треугольникѣ биссектрисса угла при вершинѣ служитъ одновременно медіаной, высотой и перпендикуляромъ къ срединѣ основанія.*

Пусть тр.-къ ABC равнобедренный и прямая BD дѣлитъ пополамъ уголъ B при вершинѣ его. Требуется доказать, что BD есть также и медіана, и высота, и перпендикуляръ къ срединѣ основанія. Вообразимъ, что $\triangle ABD$ повернутъ вокругъ стороны BD такъ, чтобы онъ упалъ на $\triangle BDC$. Тогда, вслѣдствіе равенства угловъ 1 и 2, сторона AB упадетъ на BC,



Черт. 32

а вслѣдствіе равенства этихъ сторонъ точка A совпадетъ съ C. Поэтому DA совмѣстится съ DC и уголъ 4 съ угломъ 3; значитъ, $DA = DC$ и $\angle 3 = \angle 4$. Изъ того, что $DA = DC$, слѣдуетъ, что BD есть медіана; изъ того, что углы 3 и 4 равны, выходитъ, что эти углы прямые, и BD

есть высота тр.-ка ABC; наконецъ, изъ того и другого вмѣстѣ выводимъ, что BD есть перпендикуляръ къ срединѣ основанія.

38. Слѣдствіе. 1°. Такимъ образомъ мы видимъ, что въ равнобедренномъ тр.-кѣ ABC (черт. 32) одна и та же прямая BD обладаетъ 4-мя свойствами: она есть биссектрисса угла при вершинѣ, медіана, проведенная къ основанію, высота, опущенная на основаніе, и, наконецъ, перпендикуляръ къ срединѣ основанія. Такъ какъ каждое изъ этихъ 4-хъ свойствъ вполнѣ опредѣляетъ положеніе прямой BD, то существованіе одного изъ нихъ влечетъ за собой всѣ остальныя. Напр.:

высота, опущенная на основаніе равнобедреннаго треугольника, служитъ одновременно биссектриссою угла при вершинѣ, медіаною, проведенною къ основанію, и перпендикуляромъ къ срединѣ основанія.

Дѣйствительно, во 1, эта высота должна служить биссектриссою угла при вершинѣ, потому что въ противномъ случаѣ, проведя такую биссектриссу, мы имѣли бы двѣ высоты на одну и ту же сторону тр.-ка, что невозможно. Во 2, эта высота, будучи биссектриссою, должна быть, по доказанному, и медіаной, и перпендикуляромъ къ срединѣ основанія.

39. Слѣдствіе 2°. Изъ того, что тр.-ки ABD и BDC (черт. 32) совмѣщаются всѣми своими частями, слѣдуетъ, что $\angle A = \angle C$, т.-е.

въ равнобедренномъ треугольникѣ углы при основаніи равны.

Признаки равенства треугольниковъ.

40. Предварительныя понятія. Такъ какъ *равными* треугольниками наз. такіе, которые при наложеніи совмѣщаются, то въ такихъ тр.-кахъ равны всѣ соотвѣтствующіе *элементы* ихъ, т.-е. стороны, углы, высоты, медіаны и биссектриссы.

Однако, для того, чтобы утверждать равенство двухъ треугольниковъ, *не необходимо* знать равенство *всѣхъ* элементовъ ихъ; достаточно убѣдиться въ равенствѣ только нѣкоторыхъ изъ нихъ. Слѣдующія теоремы излагаютъ три главнѣйшіе *признака* равенства тр.-ковъ.

41. Теоремы. *Два треугольника равны, если:*

1°, *двѣ стороны и уголъ, заключенный между ними, одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ сторонамъ и углу, заключенному между ними, другого треугольника;*

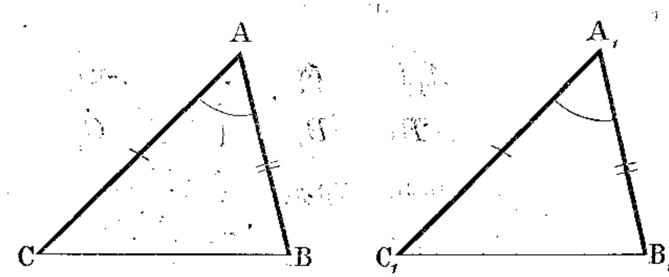
или 2°, *два угла и прилежащая къ нимъ сторона одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ угламъ и прилежащей къ нимъ сторонѣ другого треугольника;*

или 3°, *три стороны одного треугольника соотвѣтственно равны тремъ сторонамъ другого треугольника.*

1°. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ будутъ два тр.-ка, у которыхъ:

$$A = A_1,\quad AC = A_1C_1 \text{ и } AB = A_1B_1.$$

Требуется доказать, что эти тр.-ники равны.



Черт. 33

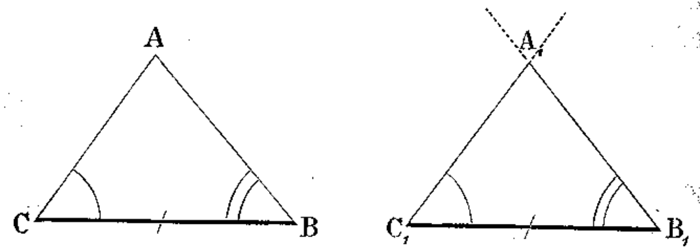
Наложимъ $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ такъ, чтобы точка A совпала съ A_1 и сторона AC пошла по A_1C_1. Тогда, вслѣдствіе равенства этихъ сторонъ, точка C совмѣстится съ C_1; вслѣдствіе равенства угловъ A и A_1 сторона AB пойдетъ по A_1B_1, а вслѣдствіе равенства этихъ сторонъ точка B упадетъ въ B_1; поэтому сторона CB совмѣстится съ C_1B_1 (между двумя точками можно провести только одну прямую) и треугольники совпадутъ; значитъ, они равны.

2°. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ будутъ два тр.-ка, у которыхъ:

$$CB = C_1B_1,\quad C = C_1 \text{ и } B = B_1.$$

Требуется доказать, что эти тр.-ники равны (черт. 34).

Наложимъ $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ такъ, чтобы точка C совпала съ C_1 и сторона CB пошла по C_1B_1; тогда, вслѣдствіе равенства этихъ сторонъ, точка B упадетъ въ B_1, а вслѣдствіе равенства угловъ B и B_1, C и C_1 сторона BA пойдетъ по B_1A_1 и сторона CA по C_1A_1. Такъ какъ двѣ прямыя могутъ пересѣчься только въ одной точкѣ, то вершина A должна совпасть съ A_1. Такимъ образомъ, тр.-ники совмѣстятся; значитъ, они равны.

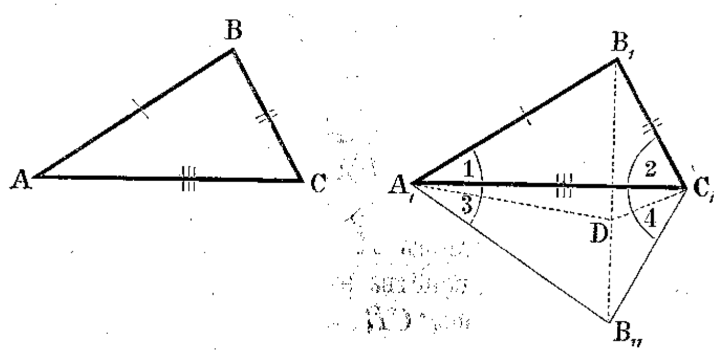


Черт. 34

3°. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ будутъ два тр.-ка, у которыхъ:

$$AB = A_1B_1,\quad BC = B_1C_1 \quad \text{и} \quad CA = C_1A_1.$$

Требуется доказать, что эти тр.-ники равны (черт. 35).



Черт. 35

Доказывать этотъ признакъ равенства *наложеніемъ*, какъ мы это дѣлали для первыхъ двухъ признаковъ, было бы неудобно, такъ какъ, не зная ничего о величинѣ угловъ, мы не можемъ утверждать, что при совпаденіи двухъ равныхъ сторонъ совпадутъ и остальныя. Употребимъ иной пріемъ доказательства.

Приложимъ $\triangle ABC$ къ $\triangle A_1B_1C_1$ такъ, чтобы у нихъ слились равныя стороны AC и A_1C_1. Тогда $\triangle ABC$ займетъ положеніе $A_1C_1B_{11}$. Соединивъ прямою точки B_1 и B_{11}, мы получимъ два равнобедренные тр.-ка $A_1B_1B_{11}$ и $B_1C_1B_{11}$ съ общимъ основаніемъ B_1B_{11}. Докажемъ, что въ каждомъ изъ нихъ прямая A_1C_1 служитъ биссектриссою угловъ при вершинѣ. Для этого допустимъ временно, что биссектрисса угла $B_1A_1B_{11}$ будетъ не A_1C_1, а какая-нибудь иная прямая A_1D, и биссектриссой угла $B_1C_1B_{11}$ будетъ не C_1A_1, а какая-нибудь иная прямая C_1D. Такъ какъ въ равнобедренномъ тр.-кѣ биссектрисса угла при вершинѣ служитъ въ то же время и медіаною, и высотою (**37**), то прямыя A_1D и C_1D, во 1-хъ, должны пройти черезъ одну и ту же точку прямой B_1B_{11}, именно черезъ средину ея, во 2-хъ, онѣ должны составить одну прямую (**26**). Но черезъ двѣ точки A_1 и C_1 можно провести только одну прямую; значитъ, биссектриссы A_1D и C_1D должны слиться съ прямой A_1C_1. Изъ этого слѣдуетъ, что $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$. Но въ такомъ случаѣ данные тр.-ки должны быть равны, такъ какъ два угла и прилежащая къ нимъ сторона одного равны соотвѣтственно двумъ угламъ и прилежащей къ нимъ сторонѣ другого.

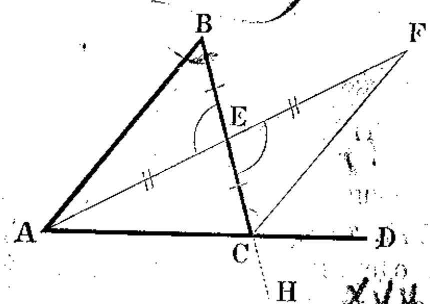
Замѣчаніе. Въ равныхъ тр.-кахъ противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы и противъ равныхъ угловъ лежатъ равныя стороны.

Соотношеніе между углами и сторонами треугольника.

42. Теорема. *Если какую-нибудь сторону треугольника продолжимъ въ одномъ направленіи, то образовавшійся при этомъ внѣшній уголъ больше каждаго внутренняго угла, не смежнаго съ нимъ.*

Напр., продолжимъ въ тр.-кѣ ABC (черт. 36) сторону AC за точку C и докажемъ, что внѣшній уголъ BCD больше каждаго изъ внутреннихъ угловъ A и B, не смежныхъ съ внѣшнимъ. Черезъ средину E стороны BC проведемъ медіану AE и продолжимъ ее на длину EF, равную AE. Соединимъ F съ C. Тр.-ки ABE и EFC равны, такъ какъ при точкѣ E

они имѣютъ по равному углу, заключенному между двумя соотвѣтственно равными сторонами. Изъ равенства ихъ заключаемъ, что углы B и ECF, лежащіе противъ равныхъ сторонъ AE и EF, равны; но уголъ ECF, составляя часть внѣшняго угла BCD, меньше его; слѣд., и уголъ B меньше BCD.



Черт. 36

Продолживъ сторону BC за точку C, мы получимъ внѣшній уголъ ACH, равный углу BCD (какъ вертикальный съ нимъ). Если изъ вершины B проведемъ къ сторонѣ AC медіану и продолжимъ ее на такую же длину за сторону AC, то совершенно такъ же докажемъ, что уголъ A меньше ACH, т.-е. меньше BCD.

43. Слѣдствіе. *Если въ треугольникѣ одинъ уголъ прямой, или тупой, то два другіе угла острые.*

Дѣйствительно, допустимъ, что какой-нибудь уголъ C тр.-ка ABC (черт. 36) будетъ прямой или тупой; тогда смежный съ нимъ внѣшній уголъ долженъ быть прямой или острый; вслѣдствіе этого углы A и B, которые, по доказанному, меньше внѣшняго угла, должны быть оба острые.

44. Теоремы. *Во всякомъ треугольникѣ: 1°, противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы; 2°, противъ большей стороны лежитъ бóльшій уголъ.*

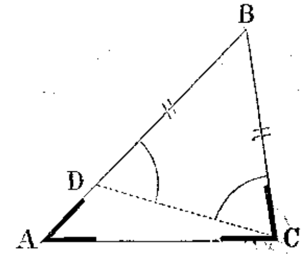
1°. Если двѣ стороны треугольника равны, то онъ равнобедренный; тогда углы, лежащіе противъ этихъ сторонъ, должны быть равны, какъ углы при основаніи равнобедреннаго треугольника (**39**).

2°. Пусть въ $\triangle ABC$ (черт. 37) сторона AB больше BC; требуется доказать, что $\angle C$ больше $\angle A$.

Отложимъ на BA часть BD, равную BC, и соединимъ D съ C. Тогда получимъ равнобедренный $\triangle DBC$, у котораго углы при основаніи равны, т.-е. $\angle BDC = \angle BCD$. Но уголъ BDC, какъ внѣшній по отношенію къ $\triangle ADC$, больше угла A; слѣд., и уг. BCD больше A, а потому и подавно, уг. BCA больше угла A; что и требовалось доказать.

45. Слѣдствіе. *Въ равностороннемъ треугольникѣ всѣ углы равны; въ разностороннемъ треугольникѣ нѣтъ равныхъ угловъ.*

46. Обратныя теоремы. *Во всякомъ треугольникѣ: 1°, противъ равныхъ угловъ лежатъ равныя стороны; 2°, противъ бóльшаго угла лежитъ бóльшая сторона.*



Черт. 37

1°. Пусть углы A и C равны (черт. 37); требуется доказать, что $AB = BC$. — Предположимъ противное, т.-е. что AB не равно BC. Тогда могутъ представиться два случая: или $AB > BC$, или $AB < BC$. Въ первомъ случаѣ, по доказанному въ теоремѣ прямой, уг. C долженъ быть больше угла A, что противорѣчитъ условію; значитъ, этотъ случай надо *исключить*. Во второмъ случаѣ, когда $AB < BC$, уг. C. долженъ быть меньше угла A, что также противорѣчитъ условію; значитъ, и этотъ случай надо *исключить*. Остается одинъ возможный случай, что $AB = BC$.

2°. Пусть въ томъ же тр—кѣ уг. C больше угла A; требуется доказать, что $AB > BC$. — Предположимъ противное, т.-е. что AB *не больше* BC. Тогда могутъ представиться два случая: или $AB = BC$, или $AB < BC$. Въ первомъ случаѣ, согласно прямой теоремѣ, углы A и C были бы равны, во второмъ случаѣ уг. A былъ бы больше C; и то, и другое противорѣчитъ условію; значитъ, оба эти случая *исключаются*. Остается одинъ возможный случай, что $AB > BC$.

47. Слѣдствія. 1°. *Равноугольный треугольникъ есть равносторонній.*

2°. *Въ треугольникѣ сторона, лежащая противъ тупого или прямого угла, больше другихъ сторонъ* (**43**).

48. Замѣчаніе объ обратныхъ теоремахъ. Если въ теоремѣ или рядѣ теоремъ мы разсмотрѣли *всевозможные* случаи, которые могутъ представиться относительно величины или расположенія нѣкоторыхъ частей фигуры, причемъ оказалось, что въ *различныхъ* случаяхъ получаются *различные* выводы относительно величины или расположенія другихъ частей фигуры, то можемъ утверждать заранѣе (à priori), что *обратныя предложенія вѣрны.*

Приведемъ этому примѣръ. Относительно величины двухъ сторонъ треугольника, напр. AB и BC, могутъ представиться только слѣдующіе три различные случая:

$$AB = BC, \ AB > BC, \ AB < BC.$$

Въ теоремахъ § **44**-го мы разсмотрѣли всѣ эти случаи, причемъ оказалось, что въ каждомъ изъ нихъ получаются *различные* выводы относительно величины противолежащихъ угловъ A и C, а именно:

$$A = C, \ A < C, \ A > C.$$

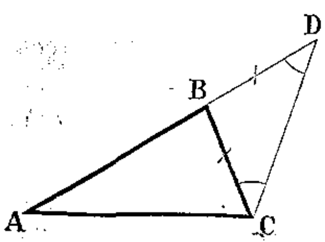
И мы видѣли (46), что обратныя предложенія оказались вѣрными, въ чемъ легко было убѣдиться доказательствомъ отъ противнаго.

Впослѣдствіи намъ неоднократно придется убѣждаться въ вѣрности этого замѣчанія.

Сравнительная длина объемлющихъ и объемлемыхъ ломаныхъ линій.

49. Теорема. *Въ треугольникѣ одна сторона меньше суммы двухъ другихъ сторонъ.*

Пусть въ $\triangle ABC$ сторона AC будетъ *наибольшая*. Докажемъ, что даже эта наибольшая сторона меньше суммы другихъ сторонъ, т.-е. меньше $AB + BC$. — Продолживъ AB, отложимъ $BD = BC$ и проведемъ DC. Такъ какъ $\triangle BDC$ равнобедренный, то $\angle D = \angle DCB$; поэтому уголъ D меньше угла DCA, и, слѣд., въ $\triangle ADC$ сторона AC меньше AD (**46**), т.-е. $AC < AB + BD$. Замѣнивъ BD на BC, получимъ



Черт. 38

$$AC < AB + BC.$$

50. Слѣдствіе. Отнявъ отъ обѣихъ частей выведеннаго неравенства по AB или по BC, найдемъ:

$$AC - AB < BC \text{ и } AC - BC < AB.$$

Читая эти неравенства справа налѣво, можемъ ихъ выразить такъ:

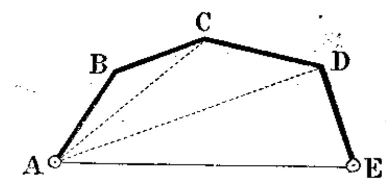
въ треугольникѣ одна сторона больше разности двухъ другихъ сторонъ.

51. Теорема. *Отрѣзокъ прямой короче всякой ломаной, проведенной между его концами.*

Пусть AE будетъ прямая, а $ABCDE$ какая-нибудь ломаная, проведенная между концами прямой. Требуется доказать, что AE короче $AB + BC + CD + DE$.

Соединивъ A съ C и D, находимъ, согласно предыдущей теоремѣ:

$$AE < AD + DE; \ AD < AC + CD; \ AC < AB + BC.$$



Черт. 39

Сложимъ почленно эти неравенства и затѣмъ отнимемъ отъ обѣихъ частей по AD и AC; тогда получимъ:

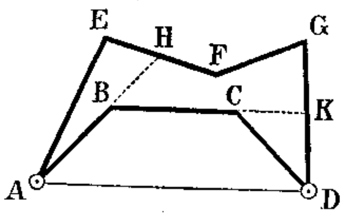
$$AE < AB + BC + CD + DE.$$

52. Теорема. *Выпуклая ломаная короче всякой объемлющей ломаной.*

Если изъ двухъ ломаныхъ линій, проведенныхъ между двумя точками A и D (черт. 40) и расположенныхъ по одну сторону отъ прямой AD, одна вся заключена внутри многоугольника, образованнаго другою ломаной съ прямой AD, то внѣшняя изъ нихъ наз. *объемлющей*, а внутренняя — *объемлемой*.

Пусть $ABCD$ будетъ *выпуклая* ломаная, а $AEFGD$ *какая-нибудь* объемлющая ломаная. Требуется доказать, что $ABCD$ короче $AEFGD$.—Продолживъ стороны AB и BC, какъ указано на чертежѣ, найдемъ (**49** и **51**):

$$AB+BH<AE+EH$$
$$BC+CK<BH+HF+FG+GK$$
$$CD<CK+KD.$$



Черт. 40

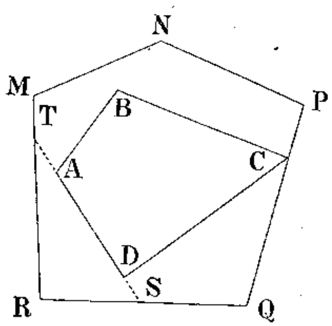
Сложивъ эти неравенства, сократимъ результатъ на вспомогательные отрѣзки BH и CK и затѣмъ замѣнимъ $EH+HF$ черезъ EF и $GK+KD$ черезъ GD; тогда получимъ:

$$AB+BC+CD<AE+EF+$$
$$+FG+GD; \text{ что и тр. док.}$$

53. Слѣдствіе. *Периметръ выпуклаго многоугольника меньше периметра всякаго другого многоугольника, внутри котораго заключенъ первый.*

Пусть $ABCD$ будетъ выпуклый многоугольникъ, а $MNPQR$ какой-нибудь многоугольникъ, внутри котораго заключенъ первый. Требуется доказать, что

$$AB+BC+CD+DA<RM+MN+NP+PQ+QR.$$



Черт. 41

Продолживъ въ обоихъ направленіяхъ какую-нибудь сторону AD выпуклаго многоугольника, будемъ имѣть:

$$AB+BC+CD<AT+TM+$$
$$+MN+NP+PQ+QS+SD;$$
$$AT+AD+DS<SR+RT.$$

Сложивъ эти неравенства, сократимъ результатъ на AT и DS; затѣмъ замѣнимъ $RT+TM$ черезъ RM и $RS+QS$ черезъ RQ; тогда получимъ:

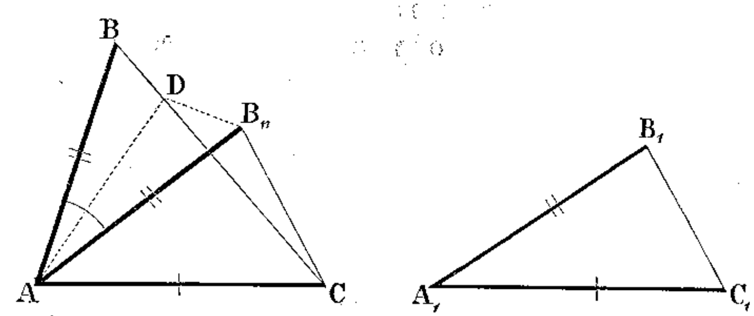
$$AB+BC+CD+DA<RM+MN+NP+PQ+QR.$$

Треугольники съ двумя соотвѣтственно равными сторонами.

54. Теоремы. *Если двѣ стороны одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ сторонамъ другого треугольника, то*

1°, *противъ большаго изъ угловъ, заключенныхъ между ними, лежитъ большая сторона;*

2°, обратно: *противъ большей изъ остальныхъ сторонъ лежитъ большій уголъ.*



Черт. 42

1°. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ будутъ два треугольника, у которыхъ:

$$AC=A_1C_1,\ AB=A_1B_1 \text{ и } A>A_1.$$

Требуется доказать, что $BC>B_1C_1$.—Наложимъ $\triangle A_1B_1C_1$ на $\triangle ABC$ такъ, чтобы сторона A_1C_1 совпала съ AC. Такъ какъ $A_1<A$, то сторона A_1B_1 пойдетъ внутри угла A; пусть $\triangle A_1B_1C_1$ займетъ положеніе ACB_{11} (вершина B_{11} можетъ упасть или внѣ $\triangle ABC$, или внутри его, или же на сторонѣ BC; доказательство можетъ быть примѣнено ко всѣмъ этимъ случаямъ). Проведемъ биссектриссу AD угла BAB_{11} и соединимъ D съ B_{11}; тогда получимъ два тр —ка ABD и DAB_{11}, которые равны, потому что у нихъ AD общая сторона, $AB=AB_{11}$ по условію и $\angle BAD=\angle DAB_{11}$ по дѣленію. Изъ равенства тр.—ковъ слѣдуетъ: $BD=DB_{11}$. Теперь изъ $\triangle DCB_{11}$ выводимъ: $B_{11}C<B_{11}D+DC$ (**49**), или (замѣнивъ $B_{11}D$ на BD):

$$B_{11}C < BD + DC, \text{ т.-е. } B_1C_1 < BC.$$

2°. Пусть въ тѣхъ же треугольникахъ будетъ дано условіемъ:

$$AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1 \text{ и } BC > B_1C_1.$$

Требуется доказать, что $A > A_1$.—Предположимъ противное, т.-е. что A *не больше* A_1*;* тогда могутъ представиться два случая: или $A = A_1$, или $A < A_1$. Въ первомъ случаѣ тр.—ки были бы равны и, слѣд., сторона BC равнялась бы B_1C_1, что противорѣчитъ условію; во второмъ случаѣ сторона BC была бы меньше B_1C_1, что также противорѣчитъ условію. Значитъ, оба эти случая исключаются; остается одинъ возможный случай, что $A > A_1$.

ГЛАВА III.

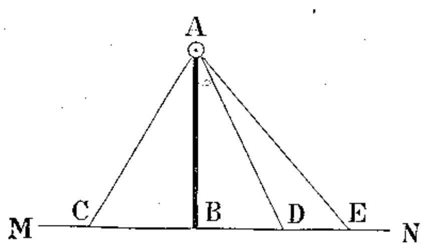
Перпендикуляры и наклонныя.

55. Теоремы. *Когда изъ одной точки проведены къ одной прямой перпендикуляръ и нѣсколько наклонныхъ, то:*

1°, *перпендикуляръ короче всякой наклонной;*

2°, *если двѣ наклонныя одинаково удалены отъ основанія перпендикуляра, то онѣ равны;*

3°, *если двѣ наклонныя неодинаково удалены отъ основанія перпендикуляра, то та изъ нихъ больше, которая дальше отстоитъ отъ перпендикуляра.*



Черт. 43

1°. Пусть изъ точки A къ прямой MN проведены перпендикуляръ AB и какая-нибудь наклонная AC. Требуется доказать, что $AB < AC$. — Въ $\triangle ABC$ уголъ B прямой, а противъ прямого угла должна лежать бо́льшая сторона (**47**, 2°); слѣд., $AC > AB$.

2°. Пусть AC и AD будутъ двѣ такія наклонныя къ прямой MN, которыхъ основанія C и D одинаково удалены отъ основанія перпендикуляра, т.-е. $CB = BD$; требуется доказать, что $AC = AD$.—Въ тр—кахъ ABC и ABD есть общая сторона AB и сверхъ того $BC = BD$ (по условію) и $\angle ABD = \angle ABC$ (какъ углы прямые); значитъ, эти тр—ки равны и потому $AC = AD$.

3°. Пусть AC и AE будутъ двѣ такія наклонныя къ прямой MN, которыхъ основанія неодинаково удалены отъ основанія перпендикуляра; напр., пусть $BE > BC$; требуется доказать, что $AE > AC$.—Отложимъ $BD = BC$ и проведемъ AD. По доказанному выше $AD = AC$. Сравнимъ AE съ AD. Уголъ ADE есть внѣшній по отношенію къ $\triangle ABD$ и потому онъ больше прямого угла ABD; слѣд., $\angle ADE$ тупой; въ $\triangle ADE$ противъ тупого угла должна лежать бо́льшая сторона (**47**, 2°); значитъ, $AE > AD$ и, слѣд., $AE > AC$.

56. Обратныя предложенія. Въ доказанныхъ теоремахъ разсмотрѣны всевозможные случаи относительно разстояній наклонныхъ отъ основанія перпендикуляра; при этомъ получились различные выводы относительно длины наклонныхъ; вслѣдствіе этого обратныя предложенія должны быть вѣрны (**48**), а именно:

1°. *Кратчайшее разстояніе точки отъ прямой есть перпендикуляръ;*

2°. *Если двѣ наклонныя равны, то онѣ одинаково удалены отъ основанія перпендикуляра;*

3°. *Если двѣ наклонныя не равны, то бо́льшая изъ нихъ дальше отстоитъ отъ основанія перпендикуляра.*

Предоставляемъ учащимся самимъ доказать эти предложенія (отъ противнаго).

Замѣчаніе. Когда говорятъ: „разстояніе точки отъ прямой“, то разумѣютъ „кратчайшее“ разстояніе, т.-е. перпендикуляръ, опущенный изъ этой точки на прямую.

Равенство прямоугольныхъ треугольниковъ.

57. Такъ какъ въ прямоугольныхъ тр—кахъ углы, содержащіеся между катетами, всегда равны, какъ прямые, то:

Прямоугольные треугольники равны, если:

1°, *катеты одного треугольника соотвѣтственно равны катетамъ другого;*

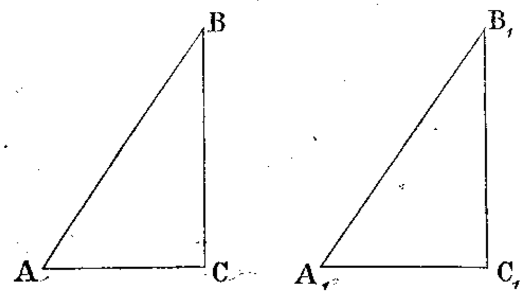
или 2°, *катетъ и прилежащій къ нему острый уголъ одного треугольника равны оотвѣтственно катету и прилежащему къ нему острому углу другого треугольника.*

Эти два признака не требуютъ особаго доказательства, такъ какъ они представляютъ лишь частные случаи общихъ признаковъ (**41**, 1° и 2°). Укажемъ еще два признака, относящіеся только до прямоугольныхъ треугольниковъ.

58. Теоремы. *Прямоугольные треугольники равны, если:*

1°, *гипотенуза и острый уголъ одного треугольника соотвѣтственно равны гипотенузѣ и острому углу другого;*

или 2°, *гипотенуза и катетъ одного треугольника соотвѣтственно равны гипотенузѣ и катету другого.*



Черт. 44

1°. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ будутъ два прямоугольные тр—ка, у которыхъ: $AB=A_1B_1$ и $A=A_1$; требуется доказать, что эти тр—ки равны. — Наложимъ $\triangle$ ABC на $A_1B_1C_1$ такъ, чтобы у нихъ совмѣстились равныя гипотенузы. Тогда, по равенству угловъ A и A_1, катетъ AC пойдетъ по A_1C_1. При этомъ катетъ BC не можетъ не совмѣститься съ B_1C_1, потому что въ противномъ случаѣ изъ точки B_1 можно было бы на прямую A_1C_1 опустить два перпендикуляра, что невозможно.

2°. Пусть въ тѣхъ же тр—кахъ будетъ дано: $AB=A_1B_1$ и $BC=B_1C_1$; требуется доказать, что тр—ки равны.—Наложимъ $\triangle$ ABC на $\triangle$ $A_1B_1C_1$ такъ, чтобы у нихъ совмѣстились равные катеты BC и B_1C_1. Тогда, по равенству прямыхъ угловъ, CA пойдетъ по C_1A_1. При этомъ гипотенузы не могутъ не совмѣститься, потому что двѣ равныя наклонныя должны быть одинаково удалены отъ основанія перпендикуляра B_1C_1.

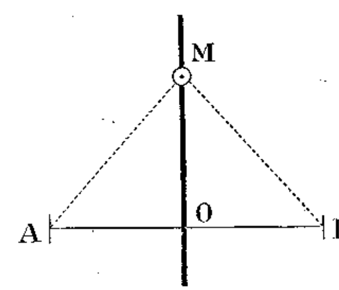
ГЛАВА IV.

Свойства перпендикуляра къ срединѣ прямой и биссектриссы угла.

59. Теоремы. 1°. *Если точка одинаково удалена отъ концовъ прямой, то она лежитъ на перпендикулярѣ къ срединѣ этой прямой.*

2°. Обратно: *если точка лежитъ на перпендикулярѣ къ срединѣ прямой, то она одинаково удалена отъ концовъ этой прямой.*

1°. Пусть точка M одинаково удалена отъ концовъ прямой AB, т.-е. $MA=MB$; требуется доказать, что M лежитъ на перпендикулярѣ къ срединѣ прямой AB. — Проведемъ биссектриссу MO угла AMB. Такъ какъ тр.-къ AMB равнобедренный, то эта биссектрисса служитъ въ немъ и перпендикуляромъ къ срединѣ основанія (**37**); значитъ, точка M лежитъ на перпендикулярѣ къ срединѣ прямой AB.



Черт. 45

2°. Пусть OM (черт. 45) будетъ перпендикуляръ къ срединѣ отрѣзка AB и M какая-нибудь точка на немъ; требуется доказать, что эта точка одинаково удалена отъ A и B, т.-е. что $MA=MB$.—Прямыя MA и MB суть наклонныя къ AB, одинаково удаленныя отъ основанія перпендикуляра MO; а такія наклонныя равны; слѣд., $MA=MB$.

60. Слѣдствіе. Изъ двухъ доказанныхъ теоремъ, прямой и обратной, можно вывести слѣдствіе, что *противоположныя* теоремы также вѣрны (**4**), т.-е., что

если точка *не* одинаково удалена отъ концовъ прямой, то она *не* лежитъ на перпендикулярѣ къ срединѣ этой прямой;

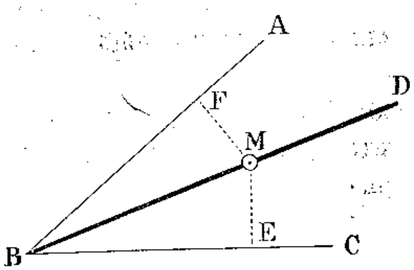
если точка *не* лежитъ на перпендикулярѣ къ срединѣ прямой, то она *не* одинаково удалена отъ концовъ этой прямой.

Предлагаемъ учащимся самимъ доказать эти противоположныя предложенія разсужденіемъ отъ противнаго.

61. Теоремы. 1°. *Если точка одинаково удалена отъ сторонъ угла, то она лежитъ на его биссектриссѣ.*

2°. Обратно: *если точка лежитъ на биссектриссѣ угла, то она одинаково удалена отъ его сторонъ.*

1°. Пусть точка M одинаково удалена отъ сторонъ угла ABC, т.-е. перпендикуляры ME и MF, опущенные изъ этой точки на стороны угла, равны; требуется доказать, что точка M лежитъ на биссектриссѣ угла ABC. — Соединимъ M съ B. Прямоугольные тр.-ки MBE и MBF равны, такъ какъ у нихъ общая гипотенуза, и катеты ME, MF равны по условію. Изъ равенства тр.-ковъ слѣдуетъ, что $\angle MBE = \angle MBF$, т.-е. прямая MB есть биссектрисса угла ABC.



Черт. 46

2°. Пусть BD (черт. 46) есть биссектрисса угла ABC, и M какая-нибудь точка на ней; требуется доказать, что перпендикуляры ME, MF, опущенные изъ этой точки на стороны угла, равны.—Прямоугольные тр.-ки MBE и MBF равны, такъ какъ у нихъ общая гипотенуза, и углы MBE, MBF равны по условію. Изъ равенства тр.-ковъ слѣдуетъ, что $ME = MF$.

62. Слѣдствіе. Изъ двухъ доказанныхъ теоремъ, прямой и обратной, можно вывести слѣдствіе, что *противоположныя* теоремы также вѣрны, т.-е. что

если точка *не* одинаково удалена отъ сторонъ угла, то она *не* лежитъ на его биссектриссѣ;

если точка *не* лежитъ на биссектриссѣ угла, то она *не* одинаково удалена отъ сторонъ его.

63. Геометрическое мѣсто. Геометрическимъ мѣстомъ точекъ, обладающихъ нѣкоторымъ свойствомъ, наз. такая линія, или совокупность линій, или поверхность, которая содержитъ въ себѣ всѣ точки, обладающія этимъ свойствомъ, и не содержитъ ни одной точки, не обладающей имъ.

Изъ теоремъ предыдущихъ параграфовъ слѣдуетъ:

Геометрическое мѣсто точекъ, одинаково удаленныхъ отъ двухъ данныхъ точекъ, есть перпендикуляръ къ срединѣ прямой, соединяющей эти точки.

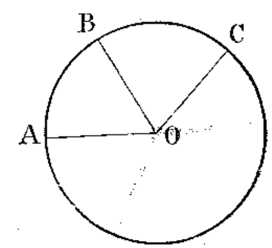
Геометрическое мѣсто точекъ, одинаково удаленныхъ отъ сторонъ угла, есть биссектрисса этого угла.

ГЛАВА V.

Основныя задачи на построеніе.

64. Теоремы, доказанныя нами въ предыдущихъ главахъ, позволяютъ рѣшать нѣкоторыя задачи *на построеніе*. Замѣтимъ, что въ элементарной геометріи разсматриваются только такія построенія, которыя могутъ быть выполнены помощью *линейки* и *циркуля* (употребленіе наугольника и нѣкоторыхъ другихъ приборовъ хотя и допускается ради сокращенія времени, но не составляетъ необходимости). Посредствомъ линейки проводятся прямыя линіи, посредствомъ циркуля чертится *окружность*. Свойства этой линіи мы разсмотримъ впослѣдствіи, теперь же ограничимся только общимъ понятіемъ объ ней.

Если дадимъ циркулю произвольное раствореніе и, поставивъ его ножку съ остріемъ въ какую-нибудь точку O, станемъ вращать циркуль вокругъ этой точки, то другая его ножка, снабженная карандашемъ или перомъ, опишетъ непрерывную линію, которой всѣ точки одина-

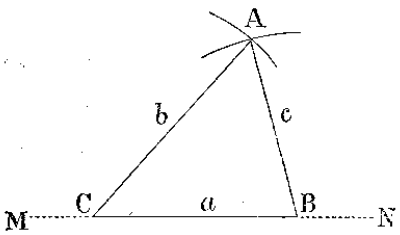


Черт. 47

ково удалены отъ точки O. Эта линія наз. *окружностью,* а точка O — *центромъ* ея. Прямыя OA, OB, OC, соединяющія центръ съ какими-нибудь точками окружности, наз. *радіусами.* Всѣ радіусы одной окружности равны между собою. Часть окружности, напр. AB (черт. 47), наз. *дугою.*

65. Укажемъ теперь рѣшеніе основныхъ задачъ на построеніе.

Задача 1. *Построить треугольникъ по даннымъ его сторонамъ a, b и c.*

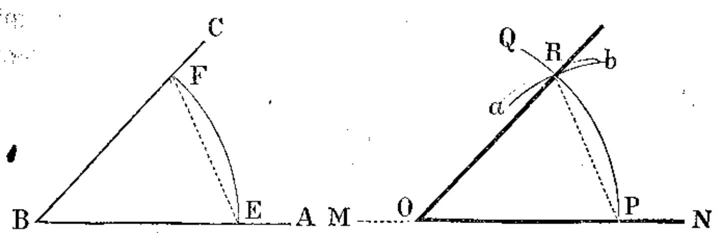


Черт. 48

На неопредѣленной прямой MN откладываемъ часть CB, равную одной изъ данныхъ сторонъ, напр. a. Изъ точекъ C и B, какъ центровъ, описываемъ двѣ небольшія дуги, одну радіусомъ, равнымъ b, другую радіусомъ, равнымъ c. Точку A, въ которой эти дуги пересѣкаются, соединяемъ съ B и C. Треугольникъ ABC будетъ искомый.

Замѣтимъ, что *не всякіе три отрѣзка прямой могутъ служить сторонами треугольника;* для этого необходимо, чтобы ни одинъ изъ нихъ не былъ больше суммы двухъ остальныхъ (**49**).

Задача 2. *На данной прямой MN при данной на ней точкѣ O построить уголъ, равный данному углу ABC.*

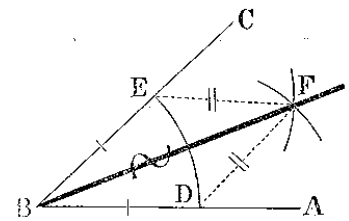


Черт. 49

Изъ вершины B, какъ центра, описываемъ произвольнымъ радіусомъ между сторонами даннаго угла дугу EF; затѣмъ,

не измѣняя растворенія циркуля, переносимъ его остріе въ точку O и описываемъ дугу PQ. Далѣе, изъ точки P, какъ центра, описываемъ дугу ab радіусомъ, равнымъ вспомогательной прямой EF. Наконецъ, черезъ точки O и R (пересѣченіе двухъ дугъ) проводимъ прямую. Уголъ ROP равенъ углу ABC, потому что тр.-ки ROP и FBE, имѣя соотвѣтственно равныя стороны, равны.

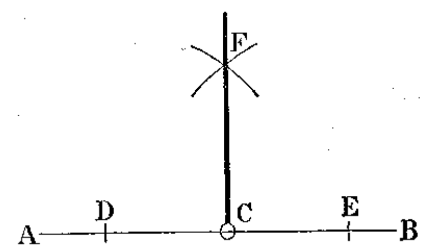
Задача 3. *Раздѣлить данный уголъ ABC пополамъ.*



Черт. 50

Изъ вершины B, какъ центра, произвольнымъ радіусомъ опишемъ между сторонами угла дугу DE. Затѣмъ изъ точекъ D и E, какъ центровъ, описываемъ *однимъ и тѣмъ же* раствореніемъ циркуля небольшія дуги, которыя пересѣклись бы въ какой-нибудь точкѣ F. Прямая BF будетъ биссектриссою угла ABC. Для доказательства соединимъ точку F съ D и E; тогда получимъ два тр.-ка BEF и BDF, которые равны, такъ какъ у нихъ BF общая сторона, $BD = BE$ и $DF = EF$ по построенію. Изъ равенства тр.-ковъ слѣдуетъ: $\angle ABF = \angle CBF$.

Задача 4. *Изъ данной точки C прямой AB возставить къ ней перпендикуляръ.*

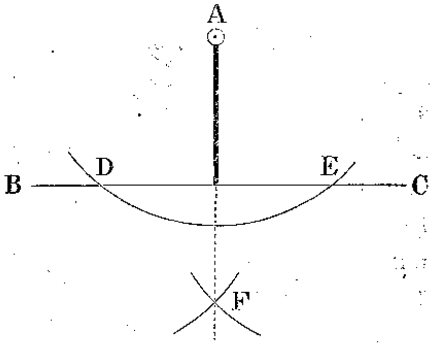


Черт. 51

Отложимъ на AB по обѣ стороны отъ данной точки C равные отрѣзки (произвольной длины) CD и CE. Изъ точекъ E и D однимъ и тѣмъ же раствореніемъ циркуля (бо́льшимъ CD) опишемъ двѣ небольшія дуги, которыя пересѣклись бы въ нѣкоторой точкѣ F. Прямая CF будетъ искомымъ перпендикуляромъ. Дѣйствительно, какъ видно изъ построенія, точка F одинаково удалена отъ D и E; слѣд., она должна лежать на перпендикулярѣ къ срединѣ отрѣзка DE (**59**); но средина этого отрѣзка есть C; значитъ, $FC \perp DE$.

Задача 5. *Изъ данной точки A опустить перпендикуляръ на данную прямую BC.*

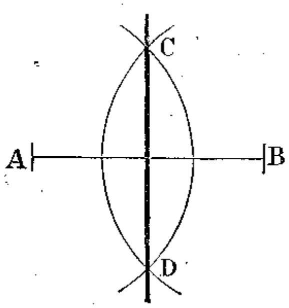
Изъ точки A, какъ центра, произвольнымъ раствореніемъ циркуля опишемъ такую дугу, которая пересѣклась бы съ BC въ какихъ-нибудь двухъ точкахъ D и E. Затѣмъ изъ этихъ точекъ произвольнымъ, но однимъ и тѣмъ же раствореніемъ циркуля проводимъ двѣ небольшія дуги, которыя пересѣклись бы между собою въ нѣкоторой точкѣ F. Прямая AF будетъ искомымъ перпендикуляромъ. Дѣйствительно, какъ видно изъ построенія, каждая изъ точекъ A и F одинаково удалена отъ D и E; а такія точки лежатъ на перпендикулярѣ къ срединѣ отрѣзка DE (**59**).



Черт. 52

Задача 6. *Провести перпендикуляръ къ срединѣ данной конечной прямой AB.*

Изъ точекъ A и B произвольнымъ, но одинаковымъ, раствореніемъ циркуля описываемъ двѣ дуги, которыя пересѣклись бы между собою въ нѣкоторыхъ точкахъ C и D. Прямая CD будетъ искомымъ перпендикуляромъ. Дѣйствительно, какъ видно изъ построенія, каждая изъ точекъ C и D одинаково удалена отъ A и B; слѣд., эти точки должны лежать на перпендикулярѣ къ срединѣ отрѣзка AB (**59**).



Черт. 53

Задача 7. *Раздѣлить пополамъ данную конечную прямую AB* (черт. 53).

Рѣшается такъ же, какъ предыдущая задача.

66. При помощи этихъ основныхъ задачъ можно рѣшать задачи болѣе сложныя. Для примѣра рѣшимъ слѣдующую задачу:

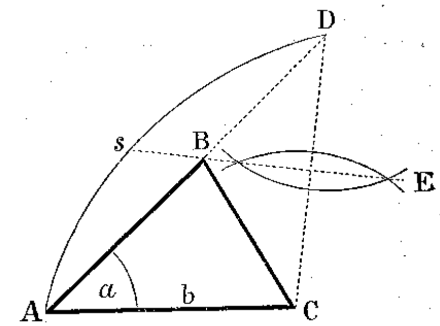
Задача. *Построить треугольникъ, зная его основаніе b,*

уголъ a, прилежащій къ основанію, и сумму s двухъ боковыхъ сторонъ.

Чтобы составить планъ рѣшенія, предположимъ, что задача рѣшена, т.-е. найденъ такой тр.-никъ ABC (черт. 54), у котораго основаніе $AC=b$, уголъ $A=a$ и $AB+BC=s$ (гдѣ b, a и s суть данныя величины, не помѣщенныя у насъ на чертежѣ). Разсмотримъ теперь полученный чертежъ. Сторону AC, равную b, и уголъ A, равный a, мы построить умѣемъ. Значитъ, остается найти на сторонѣ угла A такую точку B, чтобы сумма $AB+BC$ равнялась s.

Продолживъ AB, отложимъ AD, равную s. Теперь, очевидно, вопросъ приводится къ тому, чтобы на прямой AD отыскать такую точку B, которая была бы одинаково удалена отъ C и D. Такая точка, какъ мы знаемъ (**59**), должна лежать на перпендикулярѣ къ срединѣ отрѣзка CD. Этотъ перпендикуляръ мы построить умѣемъ. Точка B найдется въ пересѣченіи перпендикуляра съ AD.

Итакъ, вотъ рѣшеніе задачи: строимъ уголъ A, равный данному углу a; на сторонахъ его откладываемъ $AC=b$ и $AD=s$. Черезъ средину разстоянія DC проводимъ перпендикуляръ BE; пересѣченіе его съ AD, т.-е. точку B, соединяемъ съ C. Тр.-никъ ABC будетъ искомый, такъ какъ онъ удовлетворяетъ всѣмъ требованіямъ задачи: у него $AC=b$, $\angle A=a$ и $AB+BC=s$, потому что $BD=BC$.



Черт. 54

Разсматривая построеніе, мы замѣчаемъ, что задача возможна не при всякихъ данныхъ. Дѣйствительно, если сумма s задана слишкомъ малою относительно b, то перпендикуляръ EB можетъ и не пересѣчь отрѣзка AD (пересѣчетъ его продолженіе за точку A); въ этомъ случаѣ задача будетъ *невозможна*. И независимо отъ построенія можно видѣть, что задача невозможна, если $s \leq b$, потому что не можетъ быть такого треугольника, у котораго сумма двухъ сторонъ была бы равна или меньше третьей стороны.

Въ томъ случаѣ, когда задача возможна, она имѣетъ только *одно рѣшеніе,* т.-е. существуетъ только одинъ тр.-никъ, удовлетворяющій требованіямъ задачи, такъ какъ пересѣченіе перпендикуляра BE съ прямой AD можетъ быть только въ одной точкѣ.

67. Замѣчаніе. Изъ приведеннаго примѣра видно, что рѣшеніе сложной задачи на построеніе состоитъ изъ слѣдующихъ четырехъ частей:

1°. Предположивъ, что задача рѣшена, дѣлаютъ отъ руки приблизительный чертежъ искомой фигуры и затѣмъ, внимательно разсматривая начерченную фигуру, стремятся найти такія зависимости между данными задачи и искомыми, которыя позволили бы свести задачу на другія, извѣстныя ранѣе. Эта самая важная часть рѣшенія задачи (имѣющая цѣлью составить *планъ* рѣшенія) носитъ названіе *анализа.*

2°. Когда такимъ образомъ планъ рѣшенія найденъ, выполняютъ сообразно ему *построеніе.*

3°. Для провѣрки правильности плана *доказываютъ* затѣмъ, на основаніи извѣстныхъ теоремъ, что полученная фигура удовлетворяетъ всѣмъ требованіямъ задачи. Эта часть рѣшенія называется *синтезомъ.*

4°. Затѣмъ задаются вопросомъ, при всякихъ ли данныхъ задача возможна и допускаетъ ли она одно рѣшеніе, или нѣсколько. Эта часть рѣшенія наз. *изслѣдованіемъ* задачи.

Когда задача весьма проста и не можетъ быть сомнѣнія относительно ея возможности, то обыкновенно анализъ и изслѣдованіе опускаютъ, а указываютъ прямо построеніе и приводятъ доказательство. Такъ мы дѣлали, излагая рѣшеніе первыхъ 7-ми задачъ этой главы; такъ же будемъ дѣлать и впослѣдствіи, когда намъ придется излагать рѣшеніе несложныхъ задачъ.

УПРАЖНЕНІЯ.

Доказать теоремы:

5. Въ равнобедренномъ треугольникѣ двѣ медіаны равны, двѣ биссектриссы равны, двѣ высоты равны.

6. Если изъ средины каждой изъ равныхъ сторонъ равноб. тр-ка возставимъ перпендикуляры до пересѣченія съ другою изъ равныхъ сторонъ, то эти перпендикуляры равны.

7. Перпендикуляры, возстановленные къ двумъ сторонамъ угла на равныхъ разстояніяхъ отъ вершины, пересѣкаются на биссектриссѣ.

8. Прямая, перпендикулярная къ биссектриссѣ угла, отсѣкаетъ отъ его сторонъ равные отрѣзки.

9. Медіана тр.-ка меньше его периметра, ~~но больше~~ полупериметра.

10. Медіана тр.-ка меньше полусуммы сторонъ, между которыми она заключается. *Указаніе:* продолжить медіану на разстояніе, равное ей, полученную точку соединить съ однимъ концомъ стороны, къ которой проведена медіана, и разсмотрѣть образовавшуюся фигуру).

11. Сумма разстояній какой-нибудь точки, взятой внутри тр.-ка, отъ трехъ его вершинъ меньше периметра, но больше полупериметра.

12. Доказать прямо, что всякая точка, не лежащая на перпендикулярѣ къ срединѣ отрѣзка прямой, неодинаково удалена отъ концовъ этого отрѣзка.

13. Доказать прямо, что всякая точка, не лежащая на биссектриссѣ угла, неодинаково отстоитъ отъ сторонъ его.

Задачи на построеніе:

14. Построить сумму двухъ, трехъ и болѣе данныхъ угловъ.

15. Построить разность двухъ угловъ.

16. По данной суммѣ и разности двухъ угловъ найти эти углы.

17. Раздѣлить уголъ на 4, 8, 16 равныхъ частей.

18. Черезъ вершину даннаго угла провести внѣ его такую прямую, которая со сторонами угла образовала бы равные углы.

19. Построить △: a) по двумъ сторонамъ и углу между ними; b) по сторонѣ и двумъ прилежащимъ угламъ; c) по двумъ сторонамъ и углу, лежащему противъ большей изъ нихъ.

20. Построить *равнобедренный* △: a) по основанію и боковой сторонѣ; b) по основанію и прилежащему углу; c) по боковой сторонѣ и углу при вершинѣ; d) по боковой сторонѣ и углу при основаніи.

21) Построить *прямоугольный* △: a) по двумъ катетамъ; b) по катету и гипотенузѣ; c) по катету и прилежащему острому углу.

22) Построить *равнобедренный* △: a) по высотѣ и боковой сторонѣ; b) по высотѣ и углу при вершинѣ; c) по основанію и перпендикуляру, опущенному изъ конца основанія на боковую сторону.

23. Построить прямоугольный △ по гипотенузѣ и острому углу.

24. Черезъ точку, данную внутри или внѣ угла, провести такую прямую, которая отсѣкала бы отъ сторонъ угла равныя части.

25. По данной суммѣ и разности двухъ прямыхъ найти эти прямыя.

26. Раздѣлить данную конечную прямую на 4, 8, 16 равныхъ частей.

27. На данной прямой найти точку, одинаково удаленную отъ двухъ данныхъ точекъ (внѣ прямой).

28. Найти точку, равноотстоящую отъ трехъ вершинъ △.

29. На прямой, пересѣкающей стороны угла, найти точку, одинаково удаленную отъ сторонъ этого угла.

30. Найти точку, одинаково удаленную отъ трехъ сторонъ △.

31. На данной прямой AB найти такую точку C, чтобы прямыя CM и CN, проведенныя изъ C къ даннымъ точкамъ M и N, расположеннымъ по одну сторону отъ AB, составляли съ прямыми CA и CB равные углы.

32. Построить прямоугольный △ по катету и суммѣ гипотенузы съ другимъ катетомъ.

33. Построить △ по основанію, углу, прилежащему къ основанію, и разности двухъ другихъ сторонъ (разсмотрѣть два случая: 1) когда данъ *меньшій* изъ двухъ угловъ, прилежащихъ къ основанію, 2) когда данъ *большій* изъ нихъ).

34. Построить прямоугольный △ по катету и разности двухъ другихъ сторонъ.

35. То же—по гипотенузѣ и суммѣ катетовъ.

36. То же—по гипотенузѣ и разности катетовъ.

ГЛАВА VI.

Параллельныя прямыя.

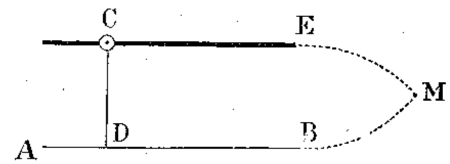
Основныя теоремы.

68. Опредѣленіе. Двѣ прямыя наз. *параллельными*, если, находясь въ одной плоскости, онѣ не пересѣкаются, сколько бы ихъ ни продолжали.

Возможность существованія такихъ прямыхъ доказывается слѣдующей теоремой.

69. Теорема. *Черезъ всякую точку внѣ прямой можно провести параллельную этой прямой.*

Пусть AB прямая и C какая-нибудь точка внѣ ея; требуется доказать, что черезъ C можно провести прямую, параллельную AB.—Опустимъ на AB изъ точки C перпендикуляръ CD и затѣмъ проведемъ $CE \perp CD$, что всегда возможно сдѣлать (19). Прямая CE будетъ параллельна AB. Для доказательства допустимъ противное, т.-е. что CE пересѣкается съ AB въ нѣкоторой точкѣ M. Тогда изъ точки M къ прямой CD мы имѣли бы два перпендикуляра MD и MC, что невозможно; значитъ, CE не можетъ пересѣчься съ AB, т.-е. CE параллельна AB.



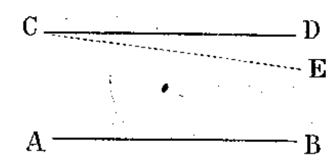
Черт. 55

70. Слѣдствіе. *Два перпендикуляра* (CE и DB, черт. 55) *къ одной прямой* (CD) *параллельны.*

71. Замѣчаніе. Что прямая AB параллельна прямой CD, выражаютъ на письмѣ такъ: $AB \parallel CD$.

72. Аксіома параллельныхъ линій. *Черезъ одну и ту же точку нельзя провести двухъ различныхъ прямыхъ, параллельныхъ одной и той же прямой.*

Такъ, если черезъ точку C проведена прямая CD, параллельная AB, то всякая другая прямая CE, проведенная черезъ точку C, пересѣчется при продолженіи съ AB.



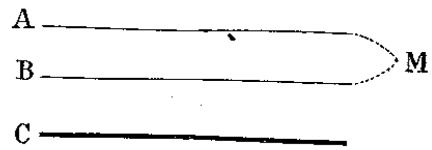
Черт. 56

Всѣ попытки доказать эту не вполнѣ очевидную истину остались безуспѣшными; поэтому ее принимаютъ безъ доказательства, какъ допущеніе (postulatum).

73. Слѣдствія. 1°. *Если прямая* (CE, черт. 56) *пересѣкается съ одной изъ параллельныхъ* (CD), *то она пересѣкается и съ другой* (AB),

потому что въ противномъ случаѣ черезъ одну и ту же точку C проходили бы двѣ прямыя, параллельныя AB, что невозможно.

2°. *Если двѣ прямыя (A и B,* черт. 57) *параллельны третьей прямой (C), то онѣ параллельны между собою.*

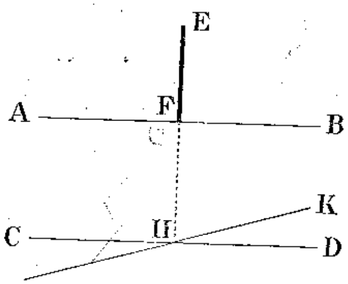


Черт. 57

Дѣйствительно, если предположимъ, что A и B пересѣкаются въ нѣкоторой точкѣ M, то тогда черезъ эту точку проходили бы двѣ прямыя, параллельныя C, что невозможно.

74. Теорема. *Если прямая перпендикулярна къ одной изъ параллельныхъ прямыхъ, то она перпендикулярна къ другой параллельной.*

Пусть $AB \parallel CD$ и $EF \perp AB$; требуется доказать, что $EF \perp CD$.—Перпендикуляръ EF, пересѣкаясь съ AB, непремѣнно пересѣчетъ и CD (**73**,1°). Пусть точка пересѣченія будетъ H. Предположимъ теперь, что CD *не перпендикулярна* къ EH. Тогда какая-нибудь другая прямая, напр. HK, будетъ перпендикулярна къ EH и, слѣд., черезъ одну и ту же точку H будутъ проходить двѣ прямыя, параллельныя AB: одна CD, по условію, а другая HK по доказанному выше (**70**); такъ какъ это невозможно, то нельзя допустить, чтобы CD была *не* перпендикулярна съ EH.



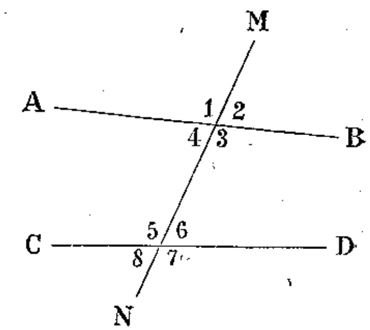
Черт. 58

75. Опредѣленія. Когда какія-либо двѣ прямыя AB и CD (черт. 59) пересѣчены третьей прямой MN, то образовавшіеся приэтомъ углы получаютъ попарно слѣдующія названія:

соотвѣтственные углы: 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7;
внутренніе накрестъ лежащіе углы: 3 и 5, 4 и 6;
внѣшніе накрестъ лежащіе углы: 1 и 7, 2 и 8;
внутренніе односторонніе углы: 3 и 6, 4 и 5;
внѣшніе односторонніе углы: 1 и 8, 2 и 7.

76. Теоремы. *Если двѣ параллельныя прямыя пересѣчены третьей прямой, то:*

1° *внутренніе накрестъ лежащіе углы равны;*
2° *внѣшніе накрестъ лежащіе углы равны;*
3° *соотвѣтственные углы равны;*
4° *сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ равна 2d;*
5° *сумма внѣшнихъ одностороннихъ угловъ равна 2d.*



Черт. 59

Пусть прямыя AB и CD (черт. 60) параллельны и пересѣчены третьею прямою MN; требуется доказать, что:

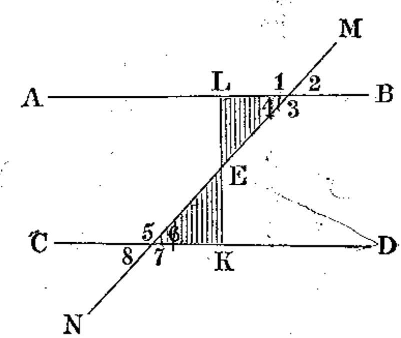
1° $\angle 4 = \angle 6$ и $\angle 3 = \angle 5$

2° $\angle 2 = \angle 8$ и $\angle 1 = \angle 7$

3° $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$

4° $\angle 3 + \angle 6 = 2d$ и $\angle 4 + \angle 5 = 2d$

5° $\angle 2 + \angle 7 = 2d$ и $\angle 1 + \angle 8 = 2d$.



Черт. 60

1° Изъ средины E отрѣзка прямой MN, заключеннаго между параллельными прямыми, опустимъ на CD перпендикуляръ EK и продолжимъ его до пересѣченія съ AB въ точкѣ L. Такъ какъ перпендикуляръ къ одной изъ параллельныхъ есть также перпендикуляръ и къ другой параллельной, то образовавшіеся при этомъ треугольники (покрытые на чертежѣ штрихами) будутъ оба прямоугольные. Они равны, потому что имѣютъ по равной гипотенузѣ и по равному острому углу при точкѣ E. Изъ равенства тр.—ковъ слѣдуетъ, что внутренніе накрестъ лежащіе углы 4 и 6 равны. Два другіе внутр. накр. лежащіе углы 3 и 5 равны, какъ дополненія до $2d$ къ равнымъ угламъ 4 и 6.

2°. Внѣшніе накрестъ лежащіе углы равны соотвѣтственно внутреннимъ накр. лежащимъ угламъ, какъ углы вертикальные; такъ, уг. $2=$уг. 4 и уг. $8=$уг. 6; но, по доказанному, уг. $4=$уг. 6; слѣд., уг. $2=$уг. 8.

3°. Соотвѣтственные углы 2 и 6 равны, потому что уг. $2=$уг. 4, а уг. $4=$уг. 6. Такъ же убѣдимся въ равенствѣ другихъ соотвѣтственныхъ угловъ.

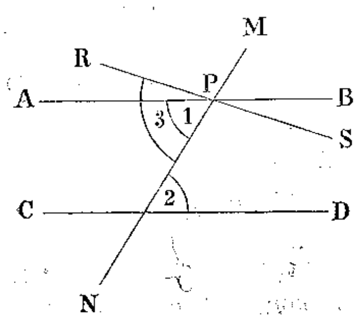
4°. Сумма внут. одностороннихъ угловъ 3 и 6 равна $2d$ потому, что сумма смежныхъ угловъ 3 и 4 равна $2d$, а уг. 4 можетъ быть замѣненъ равнымъ ему угломъ 6. Такъ же убѣдимся, что сумма угловъ 4 и 5 равна $2d$.

5°. Сумма внѣшнихъ одностороннихъ угловъ равна $2d$ потому, что эти углы равны соотвѣтственно внутреннимъ одностороннимъ угламъ, какъ углы вертикальные.

77. Обратныя теоремы. *Если при пересѣченіи двухъ прямыхъ какою-нибудь третьею прямою:*

1° *внутренніе накрестъ лежащіе углы равны;*
или 2° *внѣшніе накрестъ лежащіе углы равны;*
или 3° *соотвѣтственные углы равны;*
или 4° *сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ равна* $2d$;
или 5° *сумма внѣшнихъ одностороннихъ равна* $2d$,
то такія прямыя параллельны.

Всѣ эти предложенія легко доказываются отъ противнаго.



Черт. 61

1°. Пусть внутр. накр. лежащіе углы 1 и 2 равны; требуется доказать, что $AB \parallel CD$.— Предположимъ, что линіей, параллельной CD и проходящей черезъ точку P, будетъ не AB, а какая-нибудь иная прямая RS. Тогда, вслѣдствіе параллельности этихъ линій, мы получимъ, по доказанному равенство: уг. $3=$уг. 2; но по условію уг. $1=$уг. 2; слѣд., уг. $3=$уг. 1, что невозможно.

Подобное же разсужденіе примѣняется во всѣхъ остальныхъ случаяхъ.

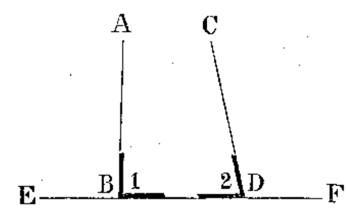
78. Слѣдствіе. *Если сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ не равна $2d$, то прямыя при достаточномъ продолженіи пересѣкаются,* такъ какъ, если бы прямыя не пересѣкались, то онѣ были бы параллельны, и тогда сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ равнялась бы $2d$.

Это предложеніе было допущено греческимъ геометромъ *Эвклидомъ* (жившимъ въ III вѣкѣ до Р. Хр.) безъ доказательства, какъ аксіома параллельныхъ линій. Въ настоящее время предпочитаютъ принимать за такую аксіому болѣе простую истину, изложенную выше въ § **72**.

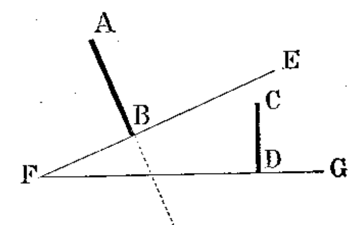
79. Полезно замѣтить еще слѣдующіе **два признака непараллельности прямыхъ.**

1°. *Перпендикуляръ (AB, черт. 62) и наклонная (CD) къ одной и той-же прямой (EF) при продолженіи пересѣкаются,*

потому что сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ 1 и 2 не равна $2d$.



Черт. 62



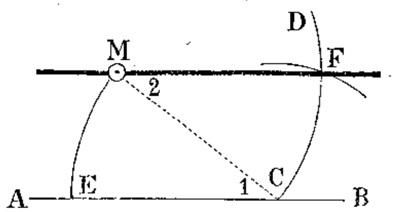
Черт. 63

2°. *Двѣ прямыя (AB и CD, черт. 63), перпендикулярныя къ двумъ пересѣкающимся прямымъ (FE и FG), при продолженіи пересѣкаются.*

Дѣйствительно, если предположимъ, что $AB \parallel CD$, то прямая FD, будучи перпендикулярна къ одной изъ параллельныхъ (къ CD), была бы перпендикулярна и къ другой параллельной (къ AB), и тогда изъ одной точки F къ прямой AB были бы проведены два перпендикуляра: FB и FD, что невозможно.

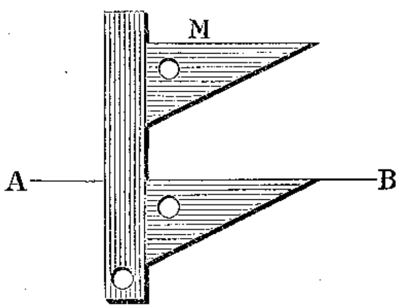
80. Задача. *Черезъ данную точку M провести прямую, параллельную данной прямой AB* (черт. 64).

Наиболѣе простое рѣшеніе этой задачи состоитъ въ слѣдующемъ: изъ точки M, какъ центра, описываемъ произвольнымъ радіусомъ дугу CD и изъ точки C тѣмъ же радіусомъ дугу ME. Затѣмъ, давъ циркулю раствореніе, равное разстоянію отъ E до M, описываемъ изъ точки C небольшую дугу, которая пересѣклась бы съ CD въ нѣкоторой точкѣ F. Прямая MF будетъ параллельна AB.— Для доказательства проведемъ MC; образовавшіеся при этомъ углы 1 и 2 равны по построенію (**65**, зад. 2); а если внутренніе накрестъ лежащіе углы равны, то линіи параллельны.



Черт. 64

Параллельныя прямыя весьма удобно проводятся также помощью наугольника и линейки. Приставивъ наугольникъ одною стороною прямого угла къ данной прямой AB, прикладываютъ къ другой его сторонѣ линейку; затѣмъ, придерживая линейку въ этомъ положеніи, двигаютъ наугольникъ вдоль нея до тѣхъ поръ, пока сторона его, совпадавшая съ AB, не будетъ проходить черезъ точку M; послѣ чего проводятъ вдоль этой стороны прямую. Эта прямая будетъ параллельна AB, такъ какъ обѣ прямыя перпендикулярны къ краевой линіи линейки.



Черт. 65

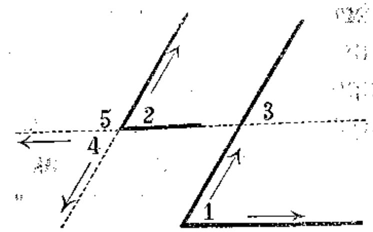
Углы съ соотвѣтственно параллельными или перпендикулярными сторонами.

81. Теорема. *Если стороны одного угла соотвѣтственно параллельны сторонамъ другого угла, то такіе углы или равны, или въ суммѣ составляютъ два прямыхъ.*

Разсмотримъ особо три случая (черт. 66).

1°. Пусть стороны угла 1 соотвѣтственно параллельны сторонамъ угла 2 и, сверхъ того, имѣютъ одинаковое направленіе отъ

вершины (на чертежѣ направленія указаны стрѣлками).— Продолживъ одну изъ сторонъ угла 2 до пересѣченія съ непараллельной ей стороной угла 1, мы получимъ уголъ 3, равный и углу 1, и углу 2 (какъ соотвѣтственные при параллельныхъ); слѣд. $\angle 1 = \angle 2$.



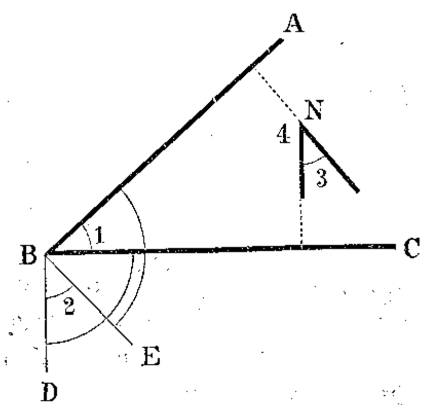
Черт. 66

2°. Пусть стороны угла 1 соотвѣтственно параллельны сторонамъ угла 4, но имѣютъ *противоположное направленіе* отъ вершины.— Продолживъ обѣ стороны угла 4, мы получимъ уг. 2, который равенъ углу 1 (по доказанному выше) и углу 4 (какъ вертикальные); слѣд. $\angle 4 = \angle 1$.

3°. Пусть, наконецъ, стороны угла 1 соотвѣтственно параллельны сторонамъ угла 5, причемъ двѣ изъ этихъ сторонъ имѣютъ одинаковое направленіе, а двѣ другія противоположное. Продолживъ одну сторону угла 5, мы получимъ уг. 2, который равенъ, по доказанному, углу 1; но $\angle 5 + \angle 2 = 2d$ (по свойству смежныхъ угловъ); слѣд. и $\angle 5 + \angle 1 = 2d$.

Такимъ образомъ углы съ параллельными сторонами оказываются равными, когда ихъ стороны имѣютъ или одинаковое, или противоположное направленіе; если же это условіе не выполнено, то углы составляютъ въ суммѣ $2d$.

82. Теорема. *Если стороны одного угла соотвѣтственно перпендикулярны къ сторонамъ другого угла, то такіе углы или равны, или въ суммѣ составляютъ два прямыхъ.*



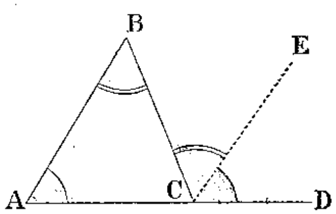
Черт. 67

Пусть уголъ ABC, обозначенный цыфрою 1, есть одинъ изъ данныхъ угловъ. Проведемъ изъ его вершины двѣ вспомогательныя прямыя: $BD \perp BC$ и $BE \perp BA$. Образованный ими уголъ 2 равенъ углу 1 по слѣдующей причинѣ: углы DBC и EBA равны, такъ какъ оба нно прямые; отнявъ отъ каждаго изъ нихъ по одному и тому же углу EBC, получимъ: $\angle 2 = \angle 1$. Теперь вообразимъ, что при какой-нибудь точкѣ N намъ данъ уголъ 3, или уголъ 4, у котораго стороны соотвѣтственно перпендикулярны къ сторонамъ угла 1. Тогда стороны этого угла будутъ параллельны сторонамъ угла 2 (потому что два перпендикуляра къ одной прямой параллельны); слѣд., уголъ при точкѣ N или равенъ углу 2, или составляетъ съ нимъ въ суммѣ $2d$. Замѣнивъ уг. 2 равнымъ ему угломъ 1, получимъ то, что требовалось доказать.

Сумма угловъ треугольника и многоугольника.

83. Теорема. *Сумма угловъ треугольника равна двумъ прямымъ.*

Пусть ABC какой-нибудь треугольникъ; требуется доказать, что сумма угловъ A, B и C равна $2d$.



Черт. 68.

Продолживъ сторону AC и проведя $CE \parallel AB$, найдемъ: $\angle A = \angle ECD$ (какъ углы соотвѣтственные при параллельныхъ), $\angle B = \angle BCE$ (какъ углы накрестъ лежащіе при параллельныхъ); слѣд.:

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle ECD + \\ + \angle BCE + \angle C = 2d.$$

84. Слѣдствія. 1°. Внѣшній уголъ треугольника равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ угловъ, не смежныхъ съ нимъ (такъ, $\angle BCD = \angle A + \angle B$).

2°. Если два угла одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ угламъ другого, то и третьи углы равны.

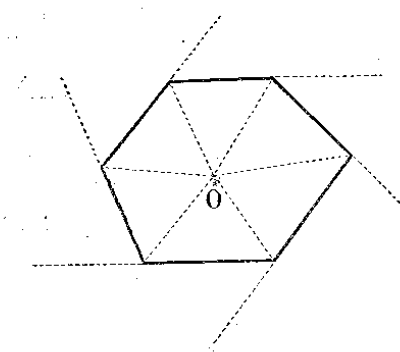
3°. Сумма двухъ острыхъ угловъ прямоугольнаго треугольника равна одному прямому углу.

4°. Въ равнобедренномъ прямоугольномъ тр.-кѣ каждый острый уголъ равенъ $^1/_2\ d$.

5°. Въ равностороннемъ тр.-кѣ каждый уголъ равенъ $^2/_3 d$.

85. Теорема. *Сумма угловъ выпуклаго многоугольника равна двумъ прямымъ, повтореннымъ столько разъ, сколько въ многоугольникѣ сторонъ безъ двухъ.*

Взявъ произвольную точку O внутри многоугольника, соединимъ ее со всѣми вершинами. Тогда многоугольникъ разобьется на столько тр.-ковъ, сколько въ немъ сторонъ. Сумма угловъ каждаго тр.-ка равна $2d$; слѣд., сумма угловъ всѣхъ тр.-ковъ равна $2dn$, если n означаетъ число сторонъ многоугольника. Эта величина, очевидно, превышаетъ сумму угловъ многоугольника на сумму угловъ, расположенныхъ вокругъ точки O; но послѣдняя сумма равна $4d$; слѣд., сумма угловъ многоугольника равна



Черт. 69.

$$2dn - 4d = 2d\ (n - 2).$$

86. Слѣдствіе. *При данномъ числѣ сторонъ сумма угловъ выпуклаго многоугольника есть величина постоянная.* Такъ, во всякомъ выпукломъ четыреугольникѣ сумма угловъ равна $4d$, въ пятиугольникѣ она равна $6d$ и т. п.

87. Теорема. *Если каждую сторону выпуклаго многоугольника продолжимъ въ одномъ направленіи, то сумма образовавшихся при этомъ внѣшнихъ угловъ равна четыремъ прямымъ.*

Каждый изъ такихъ внѣшнихъ угловъ (черт. 69) составляетъ дополненіе до $2d$ къ смежному съ нимъ внутреннему углу многоугольника; слѣд., если къ суммѣ внутреннихъ угловъ приложимъ сумму внѣшнихъ угловъ, то получимъ $2dn$ (гдѣ n число сторонъ); но точно также если къ суммѣ внутреннихъ угловъ приложимъ сумму угловъ при точкѣ O, то получимъ тоже $2dn$; значитъ, сумма внѣшнихъ угловъ равна суммѣ угловъ при точкѣ O, т.-е. равна $4d$.

ГЛАВА VII.

Параллелограммы и трапеціи.

Главнѣйшія свойства параллелограммовъ.

88. Опредѣленія. Четыреугольникъ, у котораго противоположныя стороны параллельны, наз. *параллелограммомъ*.

Параллелограммъ, у котораго одинъ изъ угловъ прямой, наз. *прямоугольникомъ*.

Черт. 70

Параллелограммъ, у котораго двѣ сосѣднія стороны равны, наз. *ромбомъ*.

Параллелограммъ, у котораго двѣ сосѣднія стороны равны и одинъ изъ угловъ прямой, наз. *квадратомъ*.

Четыреугольникъ, у котораго двѣ противоположныя стороны параллельны, наз. *трапеціей*. Параллельныя стороны ея наз. *основаніями*.

Возможность существованія перечисленныхъ фигуръ не требуетъ доказательства.

89. Теорема. *Во всякомъ параллелограммѣ:*

1°, *противоположные углы равны;*

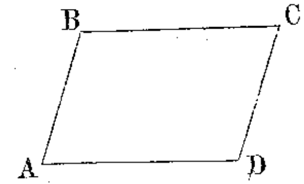
2°, *сумма угловъ, прилежащихъ къ одной сторонѣ, равна двумъ прямымъ.*

Пусть $ABCD$ (черт. 71) есть параллелограммъ, т.-е. $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$; требуется доказать, что:

1°, $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$;

2°, $\angle A + \angle B = 2d$, $\angle B + \angle C = 2d$ и т. д.

1°. Углы A и C равны, потому что стороны этихъ угловъ соотвѣтственно параллельны и имѣютъ противоположное направленіе отъ вершины (**81**). То же самое можно сказать объ углахъ B и D.



Черт. 71

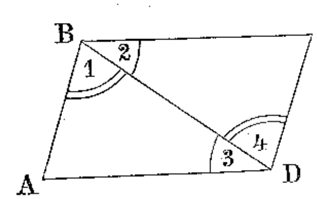
2°. Каждая изъ суммъ: $A + B$, $B + C$, $C + D$ и $D + A$ равна $2d$, потому что это суммы угловъ внутреннихъ одностороннихъ при параллельныхъ прямыхъ.

90. Слѣдствіе. *Если въ параллелограммѣ одинъ изъ угловъ прямой, то и остальные углы прямые.— Въ прямоугольникѣ всѣ углы прямые.*

91. Теорема. *Во всякомъ параллелограммѣ противоположныя стороны равны.*

Пусть $ABCD$ есть параллелограммъ, т.-е. $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$; требуется доказать, что $AB = CD$ и $BC = AD$.

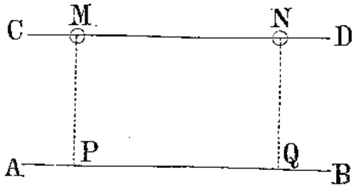
Проведя діагональ BD, получимъ два тр.-ка ABD и BCD, которые равны, потому что у нихъ: BD общая сторона, $\angle 1 = \angle 4$ и $\angle 2 = \angle 3$ (какъ внутреніе накрестъ лежащіе при параллельныхъ прямыхъ). Изъ равенства тр.-ковъ слѣдуетъ: $AB = CD$ и $AD = BC$ (въ равныхъ тр.-кахъ противъ равныхъ угловъ лежатъ равныя стороны).



Черт. 72

92. Слѣдствія. 1°. *Если въ параллелограммѣ двѣ сосѣднія стороны равны, то всѣ стороны равны.—Въ ромбѣ и квадратѣ всѣ стороны равны.*

2° *Параллельныя прямыя* (AB *и* CD, черт. 73) *вездѣ одинаково удалены одна отъ другой.*

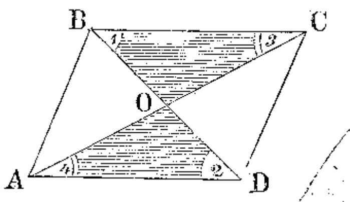


Черт. 73

Дѣйствительно, если изъ какихъ-нибудь двухъ точекъ M и N прямой CD опустимъ на AB перпендикуляры MP и NQ, то эти перпендикуляры параллельны (**70**) и потому фигура $MNQP$ параллелограммъ; отсюда слѣдуетъ, что $MP = NQ$.

93. Теорема. *Во всякомъ параллелограммѣ діагонали дѣлятся пополамъ.*

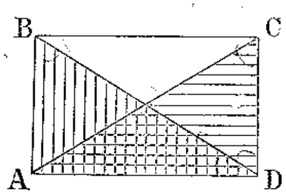
Пусть $ABCD$ есть параллелограммъ, а AC и BD его діагонали; требуется доказать, что $BO = OD$ и $AO = OC$.



Черт. 74

Тр.-ки AOD и BOC равны, потому что у нихъ: $BC = AD$ (какъ противоположныя стороны параллелограмма), $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ (какъ внутренніе накрестъ лежащіе углы при параллельныхъ прямыхъ). Изъ равенства тр.-ковъ слѣдуетъ: $OB = OD$ и $OC = OA$.

94. Теорема. *Во всякомъ прямоугольникѣ діагонали равны.*



Черт. 75

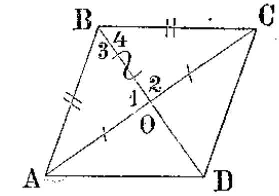
Пусть $ABCD$ есть прямоугольникъ, а AC и BD его діагонали; требуется доказать, что $AC = BD$.

Прямоугольные треугольники ACD и ABD равны, потому что у нихъ: AD общій катетъ и $AB = CD$ (какъ противоположныя стороны параллелограмма). Изъ равенства тр.-ковъ слѣдуетъ: $AC = BD$.

95. Теорема. *Во всякомъ ромбѣ діагонали перпендикулярны и дѣлятъ углы ромба пополамъ.*

Пусть $ABCD$ есть ромбъ, а AC и BD его діагонали; требуется доказать, что $AC \perp BD$ и что каждый изъ угловъ ромба дѣлится діагональю пополамъ.

Тр.-ки ABO и BOC равны, потому что у нихъ: BO общая сторона, $AB = BC$ (такъ какъ у ромба всѣ стороны равны) и $AO = OC$ (такъ какъ діагонали всякаго параллелограмма дѣлятся пополамъ). Изъ равенства тр.-ковъ слѣдуетъ: $\angle 1 = \angle 2$, т.-е. $BD \perp AC$, и $\angle 3 = \angle 4$.



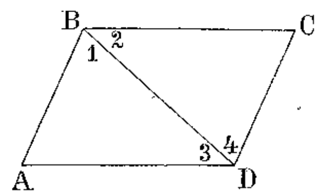
Черт. 76

96. Замѣчаніе. Такъ какъ квадратъ есть параллелограммъ, прямоугольникъ и ромбъ, то онъ соединяетъ въ себѣ всѣ свойства этихъ фигуръ.

97. Теорема. *Если у четыреугольника:* 1°, *противоположныя стороны равны, или* 2°, *двѣ противоположныя стороны равны и параллельны, то такой четыреугольникъ есть параллелограммъ.*

1°. Пусть $ABCD$ есть четыреугольникъ, у котораго:

$$AB = CD \text{ и } BC = AD.$$



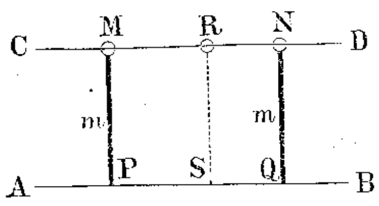
Черт. 77

Требуется доказать, что $ABCD$ есть параллелограммъ, т.-е. $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$. — Проведя діагональ BD, получимъ два тр.-ка, которые равны, такъ у нихъ: BD общая сторона, $AB = CD$ и $BC = AD$ (по условію). Изъ равенства ихъ слѣдуетъ: $\angle 1 = \angle 4$ и $\angle 2 = \angle 3$ (въ равныхъ тр.-кахъ противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы), вслѣдствіе этого $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$ (если внутр. накрестъ лежащіе углы равны, то прямыя параллельны).

2°. Пусть въ томъ же четыреугольникѣ дано условіемъ: $BC = AD$ и $BC \parallel AD$. Требуется доказать, что $ABCD$ есть параллелограммъ, т.-е. что $AB \parallel CD$. — Треугольники ABD и BCD равны, потому что у нихъ: BD общая сторона, $BC = AD$ (по условію) и $\angle 2 = \angle 3$ (какъ внутренніе накрестъ лежащіе углы при параллельныхъ BC и AD и сѣкущей BD). Изъ равенства тр.-ковъ слѣдуетъ: $\angle 1 = \angle 4$; поэтому $AB \parallel CD$.

98. Слѣдствіе. *Геометрическое мѣсто точекъ, одинаково удаленныхъ отъ данной прямой и находящихся по одну сторону отъ нея, есть прямая, параллельная данной.*

Дѣйствительно, пусть M и N будутъ какія-нибудь двѣ точки, находящіяся по одну сторону отъ прямой AB и удаленныя отъ нея на одно и то же разстояніе m, т.-е. перпендикуляры MP и NQ, опущенные изъ этихъ точекъ на AB, равны m.



Черт. 78

Проведемъ черезъ M и N прямую CD. Такъ какъ $MP=NQ$ и сверхъ того $MP \parallel NQ$, то фигура $MNQP$ есть параллелограммъ; слѣд., $CD \parallel AB$. Такимъ образомъ, всѣ точки, удаленныя отъ AB на разстояніе m и расположенныя по верхнюю сторону отъ нея, лежатъ на прямой CD, параллельной AB. Обратно: всякая точка R, взятая на этой прямой, отстоитъ отъ AB на столько же, какъ и точки M и N, т.-е. на данное разстояніе m (**92**, 2°).

99. Предлагаемъ самимъ учащимся доказать слѣдующія **обратныя теоремы:**

1°. *Всякій четыреугольникъ, у котораго противоположные углы равны, есть параллелограммъ.*

2°. *Всякій четыреугольникъ, у котораго діагонали дѣлятся пополамъ, есть параллелограммъ.*

3°. *Всякій параллелограммъ, у котораго діагонали равны, есть прямоугольникъ.*

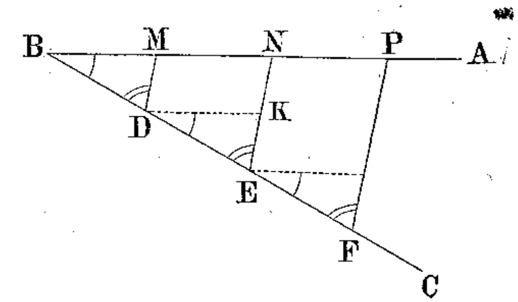
4°. *Всякій параллелограммъ, у котораго діагонали перпендикулярны, есть ромбъ.*

Нѣкоторыя теоремы, основанныя на свойствахъ параллелограмма.

100. Теорема. *Если на одной сторонѣ угла отложимъ равныя части и черезъ точки дѣленія проведемъ параллельныя прямыя до пересѣченія съ другой стороной угла, то и на этой сторонѣ отложатся равныя части.*

Пусть ABC какой-нибудь уголъ и на его сторонѣ BC отложены равныя части: $BD=DE=EF\ldots$ Проведемъ черезъ точки $D, E, F\ldots$ параллельныя прямыя $DM, EN, FP\ldots$ до пересѣченія съ AB; требуется доказать, что

$$BM=MN=NP=\ldots$$



Черт. 79

Проведя $DK \parallel MN$, получимъ $\triangle DKE$, равный $\triangle BMD$, потому что у нихъ: $BD=DE$ (по условію), $\angle B=\angle KDE$ (какъ соотвѣтственные углы припараллельныхъ BM и DK и сѣкущей BC) и $\angle BDM=\angle DEK$ (какъ соотвѣтственные углы при параллельныхъ DM и EN и сѣкущей BC). Изъ равенства тр.-ковъ выводимъ: $DK=BM$; но $DK=MN$ (какъ противоположныя стороны параллелограмма $DMNK$); потому $MN=BM$. Подобнымъ же образомъ докажемъ, что $NP=BM=MN$ и т. д.

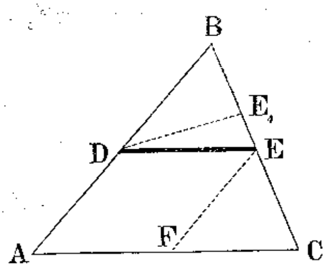
101. Задача. *Данную прямую раздѣлить на m равныхъ частей.*

Эта задача рѣшается на основаніи предыдущей теоремы.

Пусть BP (черт. 79) будетъ данная прямая, которую требуется раздѣлить, положимъ, на 3 равныя части. Изъ конца ея B проводимъ прямую BC, образующую съ BP произвольный уголъ; откладываемъ на BC отъ точки B три произвольной длины, но равные между собою, отрѣзка: BD, DE и EF; точку F соединяемъ съ P; наконецъ, изъ E и D проводимъ прямыя EN, DM, параллельныя FP. Тогда прямая BP, по доказанному, раздѣлится въ точкахъ M и N на три равныя части.

102. Теорема. *Прямая, соединяющая средины двухъ сторонъ треугольника, параллельна третьей его сторонѣ и равна ея половинѣ.*

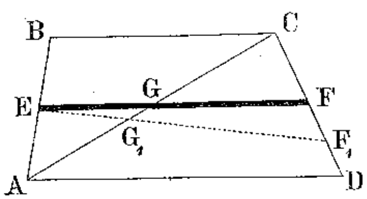
Пусть D есть средина стороны AB и E—средина стороны BC тр.-ка ABC; докажемъ сначала, что $DE \parallel AC$.



Черт. 80

Для доказательства проведемъ черезъ D прямую, параллельную AC; пусть это будетъ DE_1. Такъ какъ на сторонѣ BA угла B отложены равныя части $BD=DA$, и изъ точекъ дѣленія къ другой сторонѣ угла проведены параллельныя прямыя DE_1 и AC, то (100) на сторонѣ BC должны отложиться равныя части; значитъ: $BE_1=E_1C$, т.-е. точка E_1 есть средина BC. Но, по условію, средина BC есть точка E; слѣд. E_1 должна совмѣститься съ E, и параллельная прямая DE_1 должна слиться съ DE. Остается теперь доказать, что $DE={}^1/_2 AC$. Для этого изъ E проведемъ $EF \parallel DA$; тогда фигура $EDAF$ будетъ параллелограммъ и, слѣд., $DE=AF$. Такъ какъ на сторонѣ CB угла C отложены равныя части $CE=EB$ и изъ точекъ дѣленія проведены къ другой сторонѣ параллельныя прямыя EF и BA, то $CF=FA$; слѣд. $DE={}^1/_2 AC$.

103. Теорема. *Прямая, соединяющая средины непараллельныхъ сторонъ трапеціи, параллельна основаніямъ трапеціи и равна полусуммѣ ихъ.*



Черт. 81

Пусть E есть средина стороны AB и F—средина стороны CD трапеціи $ABCD$; требуется доказать, что $EF \parallel BC$ (и слѣд. $EF \parallel AD$) и кромѣ того, что $EF={}^1/_2\ (AD+BC)$.

1°. Проведемъ черезъ E прямую, параллельную BC; пусть это будетъ EF_1. Тогда, обращая вниманіе на $\triangle ABC$, замѣчаемъ, что діагональ AC должна раздѣлиться въ точкѣ G_1 пополамъ (100), а обращая вниманіе на $\triangle ACD$, находимъ, что сторона CD должна раздѣлиться въ точкѣ F_1 пополамъ. Но средина CD есть F; значитъ, F_1 совмѣщается съ F, и параллельная прямая EF_1 сливается съ EF.

2°. Изъ $\triangle ABC$, а затѣмъ изъ $\triangle ACD$ находимъ: $EG={}^1/_2\ BC$ и $GF={}^1/_2\ AD$; слѣд.:

$$EF=EG+GF={}^1/_2\ BC+{}^1/_2\ AD={}^1/_2\ (BC+AD).$$

Замѣчаніе. Прямая, соединяющая средины непараллельныхъ сторонъ трапеціи, наз. *среднею линіей*.

УПРАЖНЕНІЯ.

Доказать теоремы:

37. Соединивъ послѣдовательно средины сторонъ какого-нибудь четыреугольника, получимъ параллелограммъ.

38. Въ прямоугольномъ $\triangle$ медіана, проведенная къ гипотенузѣ, равна ея половинѣ. (*Указаніе*: слѣдуетъ продолжить медіану на равное разстояніе).

39. Обратно: если медіана равна половинѣ стороны, къ которой она проведена, то тр.-никъ прямоугольный.

40. Въ прямоугольномъ $\triangle$ медіана и высота, проведенныя къ гипотенузѣ, образуютъ уголъ, равный разности острыхъ угловъ $\triangle$.

41. Если въ прямоугольномъ $\triangle$ одинъ острый уголъ равенъ ${}^1/_3 d$, то противолежащій ему катетъ составляетъ половину гипотенузы.

42. Обратно: если катетъ вдвое меньше гипотенузы, то противолежащій ему острый уголъ равенъ ${}^1/_3 d$.

43. Всякая прямая, проведенная внутри параллелограмма черезъ точку пересѣченія діагоналей (черезъ *центръ* параллелограмма), дѣлится въ этой точкѣ пополамъ

44. Всякая прямая, проведенная внутри трапеціи между ея основаніями, дѣлится среднею линіей пополамъ.

45. Выпуклый многоугольникъ не можетъ имѣть болѣе трехъ острыхъ угловъ.

46. Черезъ вершины угловъ $\triangle$ проведены прямыя, параллельныя противоположнымъ сторонамъ. Образованный ими $\triangle$ въ 4 раза болѣе даннаго; каждая сторона его въ 2 раза болѣе соотвѣтствующей стороны даннаго $\triangle$.

47. Въ равнобедренномъ $\triangle$ сумма разстояній каждой точки основанія отъ боковыхъ сторонъ есть величина постоянная, а именно она равна высотѣ, опущенной на боковую сторону.

48. Какъ измѣнится эта теорема, если взять точку на продолженіи основанія?

49. Данъ квадратъ $ABCD$. На сторонахъ его отложены *равныя* части: AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 соединены послѣдовательно прямыми. Доказать, что $A_1B_1C_1D_1$ есть квадратъ.

Найти геометрическія мѣста:

50. Срединъ всѣхъ прямыхъ, проведенныхъ изъ данной точки къ различнымъ точкамъ данной прямой.

51. Точекъ, равноотстоящихъ отъ двухъ параллельныхъ прямыхъ.

52. Вершинъ тр.-ковъ, имѣющихъ общее основаніе и равныя высоты.

Задачи на построеніе:

53. Даны два угла △, построить третій.

54. Данъ острый уголъ прямоугольнаго △; построить другой острый уголъ.

55. Провести прямую, параллельную данной прямой и находящуюся отъ нея на данномъ разстояніи.

56. Раздѣлить пополамъ уголъ, вершина котораго не помѣщается на чертежѣ.

57. Черезъ данную точку провести прямую подъ даннымъ угломъ къ данной прямой.

58. Черезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы отрѣзокъ ея, заключенный между двумя данными параллельными прямыми, равнялся данной длинѣ.

59. Между сторонами даннаго остраго угла помѣстить прямую данной длины такъ, чтобы она была перпендикулярна къ одной сторонѣ угла.

60. Между сторонами даннаго угла помѣстить прямую данной длины такъ, чтобы она отсѣкала отъ сторонъ угла равныя части.

61. Построить прямоугольный △ по даннымъ острому углу и противолежащему катету.

62. Построить △ по двумъ угламъ и сторонѣ, лежащей противъ одного изъ нихъ.

63. *Построить равнобедренный* △ по углу при вершинѣ и основанію.

64. То же—по углу при основаніи и высотѣ, опущенной на боковую сторону.

65. То же—по боковой сторонѣ и высотѣ, опущенной на нее.

66. Построить равносторонній △ по его высотѣ.

67. Раздѣлить прямой уголъ на 3 равныя части (или построить уголъ, равный $^1/_3d$).

68. *Построить* △ по основанію, высотѣ и боковой сторонѣ.

69. То же—по основанію, высотѣ и углу при основаніи.

70. То же—по углу и двумъ высотамъ, опущеннымъ на стороны этого угла.

71. То же—по сторонѣ, суммѣ двухъ другихъ сторонъ и высотѣ, опущенной на одну и этихъ сторонъ.

72. То же—по двумъ угламъ и периметру.

73. То же—по высотѣ, периметру и углу при основаніи.

74. Провести въ △ прямую, параллельную основанію, такъ, чтобы она была равна суммѣ отрѣзковъ боковыхъ сторонъ, считая отъ основанія.

75. Провести въ △ прямую, параллельную основанію, такъ, чтобы верхній отрѣзокъ одной боковой стороны равнялся нижнему отрѣзку другой боковой стороны

76. Построить многоугольникъ, равный данному (*указаніе*: діагоналями не разбиваютъ мн.-никъ на тр.-ки).

77. *Построить четыреугольникъ* по тремъ его угламъ и двумъ сторонамъ, образующимъ четвертый уголъ (*указаніе:* надо найти 4-й уголъ)

78. То же—по тремъ сторонамъ и двумъ діагоналямъ.

79. *Построить параллелограммъ* по двумъ неравнымъ сторонамъ и одной діагонали.

80. То же—по сторонѣ и двумъ діагоналямъ.

81. То же—по двумъ діагоналямъ и углу между ними.

82. То же—по основанію, высотѣ и діагонали.

83. Построить *прямоугольникъ* по діагоналямъ и углу между ними.

84. *Построить ромбъ* по сторонѣ и діагонали.

85. То же—по двумъ діагоналямъ.

86. То же—по высотѣ и діагонали.

87. То же—по углу и діагонали, проходящей черезъ этотъ уголъ.

88. То же—по діагонали и противолежащему углу.

89. То же—по суммѣ діагоналей и углу, образованному діагональю со стороною.

90. Построить *квадратъ* по данной діагонали.

91. *Построить трапецію* по основанію, прилежащему къ нему углу и двумъ непараллельнымъ сторонамъ (могутъ быть два рѣшенія, одно и ни одного).

92. То же—по разности основаній, двумъ боковымъ сторонамъ и одной діагонали.

92*. То же—по четыремъ сторонамъ.

93. То же—по основанію, высотѣ и двумъ діагоналямъ.

94. То же—по двумъ основаніямъ и двумъ діагоналямъ.

95. *Построить квадратъ* по суммѣ стороны съ діагональю.

96. То же—по разности діагонали и стороны.

97. *Построить параллелограммъ* по двумъ діагоналямъ и высотѣ.

98. То же—по сторонѣ, суммѣ діагоналей и углу между ними.

99 *Построить* △ по двумъ сторонамъ и медіанѣ, проведенной къ третьей сторонѣ.

100. То же—по основанію, высотѣ и медіанѣ, проведенной къ боковой сторонѣ.

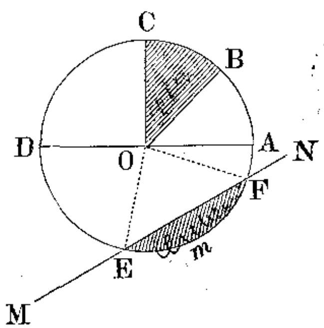
КНИГА II.

ОКРУЖНОСТЬ.

ГЛАВА I.

Форма и положеніе окружности.

104. Опредѣленія. Окружностью называется замкнутая плоская линія, всѣ точки которой одинаково удалены отъ одной и той же точки O, называемой *центромъ*. Прямыя OA, OB, OC,..., соединяющія центръ съ точками окружности, называются *радіусами*. Неопредѣленная прямая MN, проходящая черезъ какія-нибудь двѣ точки окружности, называется *сѣкущею*, а часть ея EF, заключенная между этими точками, наз. *хордою*. Всякая хорда AD, проходящая черезъ центръ, наз. *діаметромъ*. Какая-нибудь часть окружности, напр. EmF, наз. *дугою*. О хордѣ EF, соединяющей концы дуги, говорятъ, что она *стягиваетъ* дугу. Дуга обозначается иногда знакомъ $\smile$; напр., пишутъ такъ: $\smile EmF$.



Черт. 82

Часть плоскости, ограниченная окружностью, наз. *кругомъ*. Часть круга, напр. COB, ограниченная дугою и двумя радіусами, проведенными къ концамъ дуги, наз. *секторомъ*; часть круга, напр. EmF, ограниченная дугою и стягивающею ее хордою, наз. *сегментомъ*.

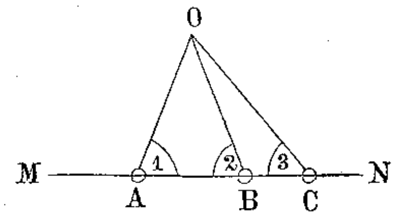
105. Слѣдствія: 1°, *всѣ радіусы одной окружности равны;*

2°, *діаметръ равенъ двумъ радіусамъ;*

3°, *точка, лежащая внутри круга, ближе къ центру, а точка внѣ круга дальше отъ центра, чѣмъ точки окружности.*

106. Теорема. *Прямая и окружность не могутъ имѣть болѣе двухъ общихъ точекъ.*

Для доказательства предположимъ, что прямая MN имѣетъ съ окружностью, которой центръ находится въ точкѣ O, три общія точки: A, B и C. Тогда прямыя OA, OB, OC должны быть равны между собою, какъ радіусы, вслѣдствіе чего тр.-ки OAB и OAC будутъ равнобедренные и, слѣдов., $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 1 = \angle 3$; откуда: $\angle 2 = \angle 3$; но это невозможно, такъ какъ $\angle 2$, будучи внѣшнимъ по отношенію къ тр-нику OBC, больше внутренняго не смежнаго съ нимъ угла 3 (**42**).



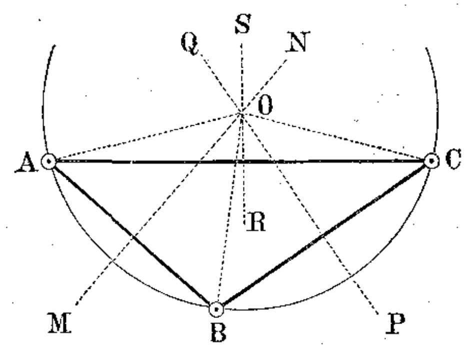
Черт. 83

107. Слѣдствіе. *Никакая часть окружности не можетъ совмѣститься съ прямой,* потому что въ противномъ случаѣ окружность съ прямою имѣла бы болѣе двухъ общихъ точекъ.

108. Опредѣленіе. Линія, которой никакая часть не можетъ совмѣститься съ прямой, наз. *кривою*.

Изъ предыдущаго параграфа слѣдуетъ, что *окружность есть кривая линія.*

109. Теорема. *Черезъ три точки, не лежащія на одной прямой, можно провести окружность и притомъ только одну.*



Черт. 84

Если возможно провести окружность черезъ три точки

A, B и C, не лежащія на одной прямой, то должна существовать такая точка, которая одинаково удалена отъ A, B и C. Чтобы найти ее, разсуждаемъ такъ: геометрическое мѣсто точекъ, одинаково удаленныхъ отъ A и B, есть прямая MN, перпендикулярная къ срединѣ отрѣзка AB (**63**); геометрическое мѣсто точекъ, одинаково удаленныхъ отъ B и C, есть прямая PQ, перпендикулярная къ срединѣ отрѣзка BC. Прямыя MN и PQ, будучи перпендикулярны къ пересѣкающимся прямымъ AB и BC, должны пересѣчься (**79**, 2°) въ нѣкоторой точкѣ O. Эта точка, находясь на обоихъ геометрическихъ мѣстахъ, одинаково удалена отъ A, B и C; поэтому окружность, описанная изъ точки O, какъ центра, радіусомъ OA, пройдетъ черезъ эти точки. Итакъ, черезъ три точки, не лежащія на одной прямой, можно провести окружность.

Такъ какъ точка, одинаково удаленная отъ A, B и C, должна непремѣнно находиться въ пересѣченіи прямыхъ MN и PQ, а двѣ прямыя могутъ пересѣчься только въ одной точкѣ, то искомая окружность имѣетъ *только одинъ* центръ O; такъ какъ, сверхъ того, длина ея радіуса можетъ быть *только одна*, равная разстоянію точки O отъ A, или отъ B, или отъ C, то искомая окружность есть *единственная*.

110. Слѣдствіе. Точка O (черт. 84), находясь на одинаковомъ разстояніи отъ A и C, должна лежать на перпендикулярѣ RS къ срединѣ хорды AC (**59**). Такимъ образомъ:

Три перпендикуляра къ срединамъ сторонъ треугольника (ABC, черт. 84) *пересѣкаются въ одной точкѣ.*

111. Задача. *Найти центръ данной окружности.*

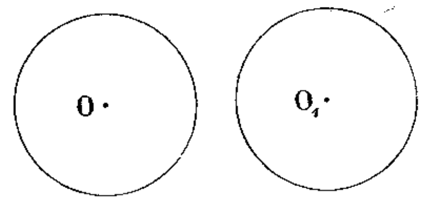
Взявъ на данной окружности какія-нибудь три точки A, B и C (черт. 84), проводятъ черезъ нихъ двѣ хорды, напр. AB и BC, и изъ срединъ этихъ хордъ возстановляютъ перпендикуляры MN и PQ. Искомый центръ, будучи одинаково удаленъ отъ A, B и C, долженъ лежать и на MN, и на PQ; слѣд., онъ будетъ въ пересѣченіи этихъ перпендикуляровъ.

ГЛАВА II.

Равенство и неравенство дугъ.

112. Теорема. *Два круга одинаковаго радіуса равны.*

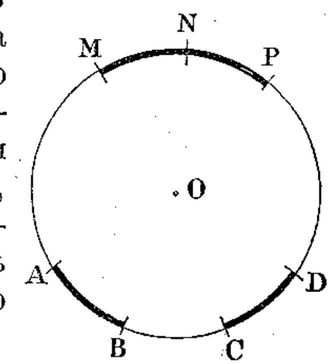
Пусть O и O_1 будутъ центры двухъ круговъ, которыхъ радіусы равны. Наложимъ кругъ O на кругъ O_1 такъ, чтобы ихъ центры совпали. Тогда обѣ окружности совмѣстятся, такъ какъ въ противномъ случаѣ ихъ точки неодинаково отстояли бы отъ центра и, слѣд., радіусы были бы неравны.



Черт. 85

113. Слѣдствіе. Вращая одинъ изъ совпавшихъ круговъ вокругъ общаго центра, мы не нарушимъ совмѣщенія. Изъ этого слѣдуетъ, что *части одной окружности или равныхъ окружностей совмѣстимы.*

114. Опредѣленія. Двѣ дуги одного радіуса считаются *равными*, если онѣ при наложеніи совмѣщаются. Положимъ, напр., что мы накладываемъ дугу AB на дугу CD такъ, чтобы точка A упала въ точку C и дуга AB пошла по дугѣ CD (что возможно, какъ мы видѣли въ предыдущемъ слѣдствіи); если при этомъ концы B и D совпадутъ, то $\smile AB = \smile CD$; въ противномъ случаѣ дуги неравны, причемъ та будетъ меньше, которая составитъ только *часть* другой.

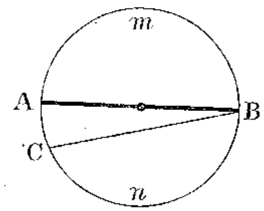


Черт. 86

Суммою нѣсколькихъ данныхъ дугъ одинаковаго радіуса наз. такая дуга того же радіуса, которая составлена изъ частей, соотвѣтственно равныхъ даннымъ дугамъ. Такъ, если отъ произвольной точки M (черт. 86) окружности отложимъ часть MN, равную AB, и затѣмъ отъ точки N въ томъ же направленiи часть NP, равную CD, то дуга MP будетъ сумма дугъ AB и CD. Подобно этому можно составить сумму трехъ и болѣе дугъ.

Изъ понятія о суммѣ дугъ одного и того же радіуса выводятся понятія объ ихъ *разности, произведеніи и частномъ* въ томъ же смыслѣ, какъ и для отрѣзковъ прямыхъ.

115. Теорема. *Всякій діаметръ дѣлитъ окружность и кругъ пополамъ.*


Черт. 87

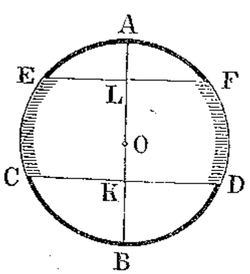
Вообразимъ, что кругъ перегнутъ по какому-нибудь діаметру AB такъ, чтобы часть AmB упала на часть AnB. Тогда всѣ точки дуги m совмѣстятся съ точками дуги n, потому что въ противномъ случаѣ точки одной дуги лежали бы ближе къ центру, чѣмъ точки другой дуги, что невозможно.

Такимъ образомъ, всякій діаметръ раздѣляетъ окружность на двѣ *полуокружности* и кругъ на два *полукруга*.

116. Замѣчаніе. Всякая хорда CB (черт. 87), не проходящая черезъ центръ, стягиваетъ двѣ *неравныя* дуги: одну, бо́льшую полуокружности, другую—меньшую ея. Когда говорятъ: „дуга, стягиваемая хордой“, то обыкновенно разумѣютъ дугу, меньшую полуокружности.

117. Теоремы. 1°. *Діаметръ, перпендикулярный къ хордѣ, дѣлитъ эту хорду и обѣ стягиваемыя ею дуги пополамъ.*

2°. *Дуги, заключенныя между параллельными хордами, равны.*


Черт 88

1°. Пусть діаметръ AB перпендикуляренъ къ хордѣ CD; требуется доказать, что

$$CK = KD \text{ и } \smile CB = \smile BD, \ \smile CA = \smile DA.$$

Перегнемъ чертежъ по діаметру AB такъ, чтобы его лѣвая часть упала на правую. Тогда полуокружность $AECB$

совмѣстится съ полуокружностью $AFDB$, а перпендикуляръ KC пойдетъ по KD. Изъ этого слѣдуетъ, что точка C совпадетъ съ D; поэтому:

$$KC = KD; \ \smile BC = \smile BD; \ \smile AC = \smile AD.$$

2°. Пусть (черт. 88) хорды EF и CD параллельны; требуется доказать, что $\smile CE = \smile DF$.—Проведя діаметръ AB, перпендикулярный къ хордамъ (74), перегнемъ чертежъ по этому діаметру. Тогда одна полуокружность совпадетъ съ другою, перпендикуляръ KC пойдетъ по KD, а перпендикуляръ LE по LF. Изъ этого слѣдуетъ, что точка C совмѣстится съ D, а точка E съ F; значитъ, $\smile CE = \smile DF$.

118. Задача. *Раздѣлить данную дугу* (CD, черт. 88) *пополамъ.*

Проведя хорду CD, опускаемъ на нее перпендикуляръ изъ центра и продолжаемъ его до пересѣченія съ дугою. По доказанному въ предыдущей теоремѣ дуга CD раздѣлится этимъ перпендикуляромъ пополамъ.

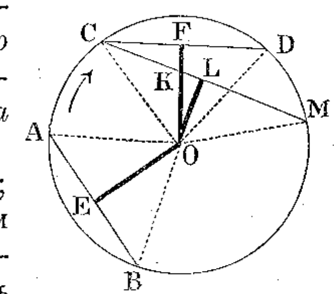
ГЛАВА III.

Зависимость между дугами, хордами и разстояніемъ хордъ отъ центра.

119. Теоремы. *Въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ:*

1°, *если дуги равны, то стягивающія ихъ хорды равны и одинаково удалены отъ центра;*

2°, *если дуги не равны и притомъ меньше полуокружности, то бо́льшая изъ нихъ стягивается бо́льшею хордою, и эта бо́льшая хорда ближе къ центру.*


Черт. 89

1°. Пусть дуга AB равна дугѣ CD; требуется доказать, что хорды AB и CD равны, а также равны перпендикуляры OE и OF, опущенные изъ центра на хорды. — Повернемъ секторъ OAB вокругъ центра O въ направленіи, указанномъ стрѣлкою, на столько, чтобы радіусъ OB совпалъ съ OC. Тогда дуга BA пойдетъ по дугѣ CD, и вслѣдствіе ихъ равенства эти дуги совмѣстятся. Значитъ, хорда AB совмѣстится съ хордою CD (между двумя точками можно провести только одну прямую) и перпендикуляръ OE совпадетъ съ OF (изъ одной точки можно опустить на прямую только одинъ перпендикуляръ); т.-е. $AB = CD$ и $OE = OF$.

2°. Пусть дуга AB (черт. 89) меньше дуги CM, и притомъ обѣ дуги меньше полуокружности; требуется доказать, что хорда AB меньше хорды CM, а перпендикуляръ OE больше перпендикуляра OL. — Отложимъ на дугѣ CM часть CD, равную AB, и проведемъ вспомогательную хорду CD, которая, по доказанному, равна хордѣ AB. У тр.-ковъ COM и COD двѣ стороны одного равны двумъ сторонамъ другого (какъ радіусы), а углы, заключенные между этими сторонами, не равны; въ этомъ случаѣ, какъ мы знаемъ (**54**), противъ большаго изъ угловъ, т.-е. COM, должна лежать большая сторона; значитъ, $CM > CD$, и потому $CM > AB$.

Для доказательства того, что $OE > OL$, примемъ во вниманіе, что, по доказанному въ 1-ой части этой теоремы, $OE = OF$; слѣд., намъ достаточно сравнить OF съ OL. Въ прямоугольномъ тр.-кѣ OKL гипотенуза OK больше катета OL; но $OF > OK$; значитъ, и подавно, $OF > OL$ и потому $OE > OL$.

Теорема, доказанная нами для *одного* круга, остается вѣрною и для *равныхъ* круговъ, потому что такіе круги ничѣмъ другъ отъ друга не отличаются, кромѣ своего положенія.

120. Обратныя предложенія. Такъ какъ въ предыдущемъ параграфѣ разсмотрѣны всевозможные случаи относительно величины двухъ дугъ одного радіуса, причемъ получились различные выводы относительно величины хордъ и разстоянія ихъ отъ центра, то обратныя предложенія должны быть вѣрны (**48**), а именно:

Въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ:

1°, *равныя хорды стягиваютъ равныя дуги и одинаково удалены отъ центра;*

2°, *хорды, одинаково удаленныя отъ центра, равны и стягиваютъ равныя дуги;*

3°, *изъ двухъ неравныхъ хордъ большая стягиваетъ бо́льшую дугу и ближе къ центру;*

4°, *изъ двухъ хордъ, неодинаково удаленныхъ отъ центра, та, которая ближе къ центру, болѣе и стягиваетъ бо́льшую дугу.*

Эти предложенія легко доказываются отъ противнаго. Напр., для доказательства перваго изъ нихъ разсуждаемъ такъ: если бы данныя хорды стягивали неравныя дуги, то, согласно прямой теоремѣ, онѣ были бы неравны, что противорѣчитъ условію; значитъ, равныя хорды должны стягивать равныя дуги; а если дуги равны, то, согласно прямой теоремѣ, стягивающія ихъ хорды одинаково удалены отъ центра.

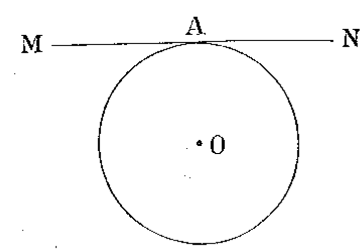
121. Теорема. *Діаметръ есть наибольшая изъ хордъ.*

Если соединимъ съ центромъ концы какой-нибудь хорды, не проходящей черезъ центръ, то получимъ тр.-къ, въ которомъ одна сторона есть эта хорда, а двѣ другія — радіусы. Но въ тр.-кѣ одна сторона менѣе суммы двухъ другихъ сторонъ; слѣдов., взятая нами хорда менѣе двухъ радіусовъ; тогда какъ всякій діаметръ равенъ двумъ радіусамъ. Значитъ, діаметръ больше всякой хорды, не проходящей черезъ центръ.

ГЛАВА IV.

Свойства касательной.

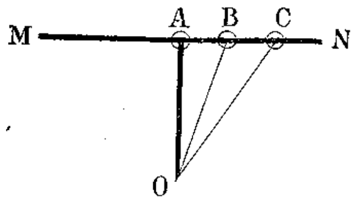
122. Опредѣленіе. Прямая MN, имѣющая съ окружностью только одну общую точку A, наз. *касательною* къ окружности.



Черт. 90

Возможность существованія касательной, и при томъ во всякой точкѣ окружности, доказывается слѣдующей теоремой.

123. Теорема. *Если прямая перпендикулярна къ радіусу въ конце его, лежащемъ на окружности, то она есть касательная.*

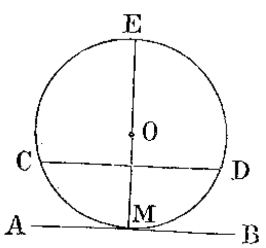


Черт. 91

Пусть O есть центръ круга и OA какой-нибудь радіусъ. Черезъ конецъ его A проведемъ $MN \perp OA$; требуется доказать, что прямая MN есть касательная, т.-е. что эта прямая имѣетъ съ окружностью только одну общую точку A.— Допустимъ противное: пусть MN имѣетъ съ окружностью еще другую общую точку, напр. B. Тогда прямая OB была бы радіусомъ и, слѣд., равнялась бы OA; но этого быть не можетъ, такъ какъ, если OA есть перпендикуляръ, то OB должна быть наклонная къ MN, а наклонная больше перпендикуляра.

124. Обратная теорема. *Если прямая касательна къ окружности, то радіусъ, проведенный въ точку касанія, перпендикуляренъ къ ней.*

Пусть MN (черт. 91) есть касательная къ окружности, A точка касанія и O центръ окружности; требуется доказать, что $OA \perp MN$.— Допустимъ противное, т.-е. предположимъ, что перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ O на MN, будетъ не OA, а какая-нибудь другая прямая, напр. OB. Возьмемъ $BC = BA$ и проведемъ OC. Тогда OA и OC будутъ наклонныя, одинаково удаленныя отъ перпендикуляра OB, и слѣд. $OC = OA$. Изъ этого слѣдуетъ, что окружность, при нашемъ предположеніи, будетъ имѣть съ прямою MN *двѣ общія точки:* A и C, т.-е. MN будетъ не касательная, а сѣкущая, что противорѣчитъ условію.



Черт. 92

125. Теорема. *Касательная, параллельная хордѣ, дѣлитъ въ точкѣ касанія дугу, стягиваемую хордой, пополамъ.*

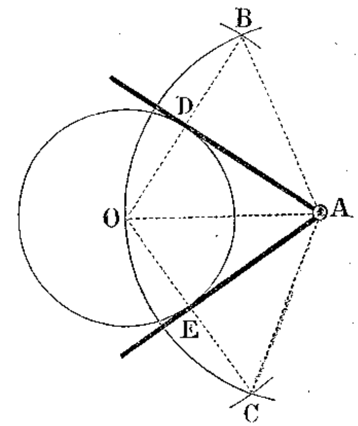
Пусть прямая AB касается окружности въ точкѣ M и параллельна хордѣ CD; требуется доказать, что $\smile CM = \smile MD$.

Проведя черезъ точку касанія діаметръ ME, будемъ имѣть: $EM \perp AB$ (124) и слѣд. $EM \perp CD$ (**74**); поэтому $\smile CM = \smile MD$ (**117**).

126. Задача. *Черезъ данную точку провести касательную къ данной окружности.*

Проведеніе касательной черезъ точку, данную *на окружности,* выполняется на основаніи теоремы § **123:** проводятъ черезъ эту точку радіусъ и черезъ конецъ его перпендикулярную прямую. Разсмотримъ тотъ случай, когда точка дана *внѣ окружности.*

Пусть требуется провести къ окружности O касательную черезъ точку A. Для этого изъ точки A, какъ центра, описываемъ дугу радіусомъ AO, а изъ точки O, какъ центра, пересѣкаемъ эту дугу въ точкахъ B и C раствореніемъ циркуля, равнымъ діаметру даннаго круга. Проведя затѣмъ хорды OB и OC, соединимъ точку A съ точками D и E, въ которыхъ эти хорды пересѣкаются съ данною окружностью. Прямыя AD и AE будутъ касательными къ окружности O. Дѣйствительно, изъ построенія видно, что тр.-ки AOB и AOC равнобедренные $(AO = AB = AC)$ съ основаніями OB и OC, равными діаметру круга O. Такъ какъ OD и OE суть радіусы, то D есть средина OB и E средина OC; значитъ, AD и AE суть *медіаны,* проведенныя къ основаніямъ равнобедренныхъ тр.-ковъ, и потому перпендикулярны къ этимъ основаніямъ (**37**). Если же прямыя DA и EA перпендикулярны къ радіусамъ OD и OE, то онѣ касательныя (**123**).



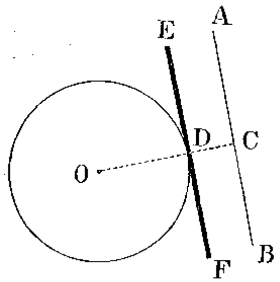
Черт. 93

Другой способъ проведенія касательной будетъ указанъ ниже (**158**).

127. Слѣдствіе. *Двѣ касательныя, проведенныя изъ одной точки къ окружности, равны.*

Такъ, $AD = AE$ (черт. 93), потому что прямоугольные тр.-ки AOD и AOE, имѣющіе общую гипотенузу AO и равные катеты OD и OE (какъ радіусы), равны.

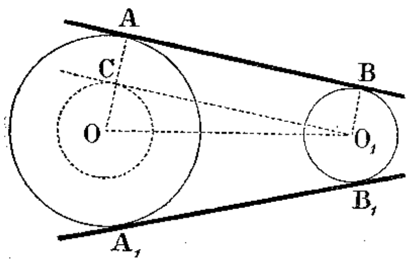
128. Задача. *Провести касательную къ данной окружности O параллельно данной прямой AB.*



Черт. 94

Опускаемъ на AB изъ центра O перпендикуляръ OC и черезъ точку D, въ которой этотъ перпендикуляръ пересѣкается съ окружностью, проводимъ $EF \parallel AB$. Искомая касательная будетъ EF. Дѣйствительно, такъ какъ $OC \perp AB$ и $EF \parallel AB$, то $EF \perp OD$; а прямая, перпендикулярная къ радіусу въ концѣ его, лежащемъ на окружности, есть касательная.

129. Задача. *Къ двумъ окружностямъ O и O_1 провести общую касательную.*

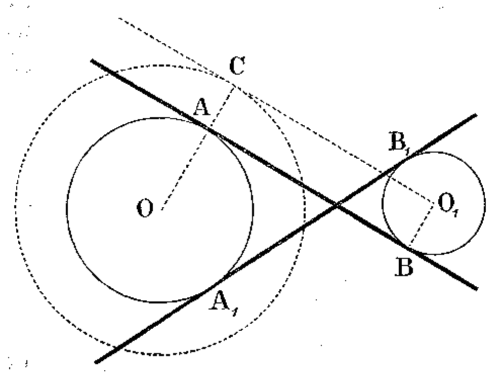


Черс. 95

1°. Предположимъ, что задача рѣшена. Пусть AB будетъ общая касательная, A и B точки касанія. Очевидно, что если мы найдемъ одну изъ этихъ точекъ, напр. A, то затѣмъ легко найдемъ и другую. Проведемъ радіусы OA и O_1B. Эти радіусы, будучи перпендикулярны къ общей касательной, параллельны между собою; поэтому если изъ O_1 проведемъ $O_1C \parallel BA$, то тр.-къ OCO_1 будетъ *прямоугольный* при вершинѣ C; вслѣдствіе этого, если опишемъ изъ O, какъ центра, радіусомъ OC окружность, то она будетъ касаться прямой O_1C въ точкѣ C. Радіусъ этой вспомогательной окружности извѣстенъ: онъ равенъ $OA - CA = OA - O_1B$, т.-е. онъ равенъ разности радіусовъ данныхъ окружностей. Такимъ образомъ построеніе можно выполнить такъ: изъ O описываемъ окружность радіусомъ, равнымъ разности данныхъ радіусовъ; изъ O_1

проводимъ къ этой окружности касательную O_1C (способомъ, указаннымъ въ предыдущей задачѣ); черезъ точку касанія C проводимъ радіусъ OC и его продолжаемъ до встрѣчи съ данною окружностью въ точкѣ A. Наконецъ, изъ A проводимъ AB параллельно CO_1.

Совершенно такимъ же способомъ мы можемъ построить другую общую касательную A_1B_1. Прямыя AB и A_1B_1 наз. *внѣшними* общими касательными. Можно еще провести двѣ *внутреннія* касательныя слѣдующимъ образомъ.



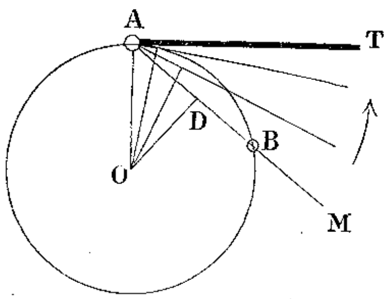
Черт. 96

2°. Предположимъ, что задача рѣшена. Пусть AB будетъ искомая касательная. Проведемъ радіусы OA и O_1B въ точки касанія A и B. Эти радіусы, будучи оба перпендикулярны къ общей касательной, параллельны между собою. Поэтому если изъ O_1 проведемъ $O_1C \parallel BA$ и продолжимъ OA до точки C, то OC будетъ перпендикуляръ къ O_1C; вслѣдствіе этого окружность, описанная радіусомъ OC изъ точки O, какъ центра, будетъ касаться прямой O_1C въ точкѣ C. Радіусъ этой вспомогательной окружности извѣстенъ: онъ равенъ $OA + AC = OA + O_1B$, т.-е. онъ равенъ суммѣ радіусовъ данныхъ окружностей. Такимъ образомъ, построеніе можетъ быть выполнено такъ: изъ O, какъ центра, описываемъ окружность радіусомъ, равнымъ суммѣ данныхъ радіусовъ; изъ O_1 проводимъ къ этой окружности касательную O_1C; точку касанія C соединяемъ съ O; наконецъ, черезъ точку A, въ которой OC пересѣкается съ данною окружностью, проводимъ $AB \parallel CO_1$.

Подобнымъ же способомъ можемъ построить другую внутреннюю касательную A_1B_1.

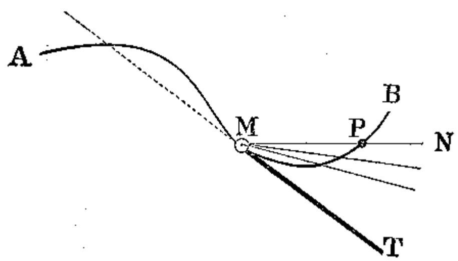
130. Общее опредѣленіе касательной. Пусть къ окружности O проведены черезъ точку A касательная AT и какая-нибудь сѣкущая AM.

Станемъ вращать эту сѣкущую вокругъ точки A такъ, чтобы другая точка пересѣченія B все ближе и ближе придвигалась къ A. Тогда перпендикуляръ OD, опущенный изъ центра на сѣкущую, будетъ все болѣе и болѣе приближаться къ радіусу OA, и уголъ AOD можетъ сдѣлаться меньше всякаго малаго угла. Уголъ MAT, образованный сѣкущею и касательною, равенъ углу AOD (вслѣдствіе перпендикулярности ихъ сторонъ); поэтому при неограниченномъ приближеніи точки B къ A уголъ MAT также можетъ быть сдѣланъ какъ угодно малъ. Это выражаютъ иными словами такъ: *касательная есть предѣльное положеніе, къ которому стремится сѣкущая, проведенная черезъ точку касанія, когда вторая точка пересѣченія неограниченно приближается къ точкѣ касанія.*



Черт. 97

Это свойство принимаютъ за *опредѣленіе касательной,* когда рѣчь идетъ о какой угодно кривой. Такъ, касательною къ кривой AB въ точкѣ M наз. предѣльное положеніе MT, къ которому стремится сѣкущая MN, когда точка пересѣченія P неограниченно приближается къ M.



Черт. 98

Замѣтимъ, что опредѣляемая такимъ образомъ касательная можетъ имѣть съ кривою болѣе одной общей точки (какъ это видно на черт. 98).

131. Выпуклая кривая. Кривая, или часть кривой, наз. *выпуклою,* если она расположена по одну сторону отъ каждой своей касательной.

Выпуклая кривая обладаетъ тѣмъ же свойствомъ, какъ и выпуклая ломаная: она не можетъ пересѣчься съ прямою болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ.

Окружность есть выпуклая кривая.

ГЛАВА V.

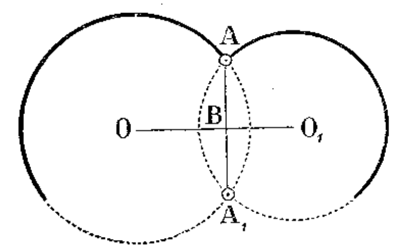
Относительное положеніе окружностей.

132. Опредѣленія. Если двѣ окружности имѣютъ только одну общую точку, то говорятъ, что онѣ *касаются;* если же двѣ окружности имѣютъ двѣ общія точки, то говорятъ, что онѣ *пересѣкаются.*

Трехъ общихъ точекъ двѣ не сливающіяся окружности имѣть не могутъ, потому что въ противномъ случаѣ черезъ три точки можно было бы провести двѣ различныя окружности, что невозможно (**109**).

133. Теорема. *Если двѣ окружности имѣютъ общую точку по одну сторону отъ линіи ихъ центровъ, то онѣ имѣютъ общую точку и по другую сторону отъ линіи центровъ, т.-е. такія окружности пересѣкаются.*

Пусть окружности O и O_1 имѣютъ общую точку A, лежащую внѣ линіи центровъ OO_1; требуется доказать, что эти окружности имѣютъ еще общую точку по другую сторону отъ прямой OO_1.



Черт. 99

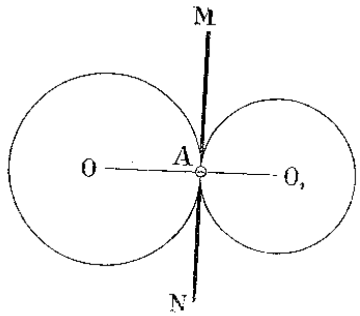
Опустимъ изъ A на прямую OO_1 перпендикуляръ AB и продолжимъ его на разстояніе BA_1, равное AB. Докажемъ теперь, что точка A_1 принадлежитъ обѣимъ окружностямъ. Изъ построенія видно, что точки O и O_1 лежатъ на перпендикулярѣ къ срединѣ отрѣзка AA_1. Изъ этого слѣдуетъ, что точка O одинаково удалена отъ A и A_1 (**59**, 2°); то же можно сказать и о точкѣ O_1; значитъ, обѣ окружности, при продолженіи ихъ, пройдутъ черезъ A_1. Такимъ образомъ, окружности будутъ имѣть двѣ общія точки: A (по условію) и A_1 (по доказанному); слѣд., онѣ пересѣкаются.

134. Слѣдствіе. *Общая хорда* (AA_1, черт. 99) *двухъ пересѣкающихся окружностей перпендикулярна къ линіи центровъ и дѣлится ею пополамъ.*

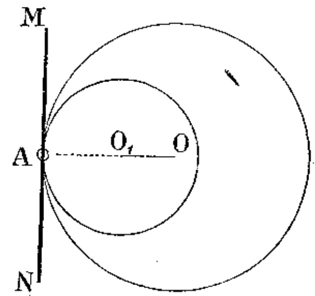
135. Теоремы. 1°. *Если двѣ окружности имѣютъ общую точку на линіи центровъ или на ея продолженіи, то онѣ касаются.*

2°. Обратно: *если двѣ окружности касаются, то общая ихъ точка лежитъ на линіи центровъ или на ея продолженіи.*

1°. Пусть общая точка A двухъ окружностей лежитъ на линіи центровъ OO_1 (черт. 100) или на продолженіи ея (черт. 101). Требуется доказать, что такія окружности касаются, т.-е. что онѣ не имѣютъ никакой другой общей точки. — Окружности не могутъ имѣть другой общей точки *внѣ*



Черт. 100



Черт. 101

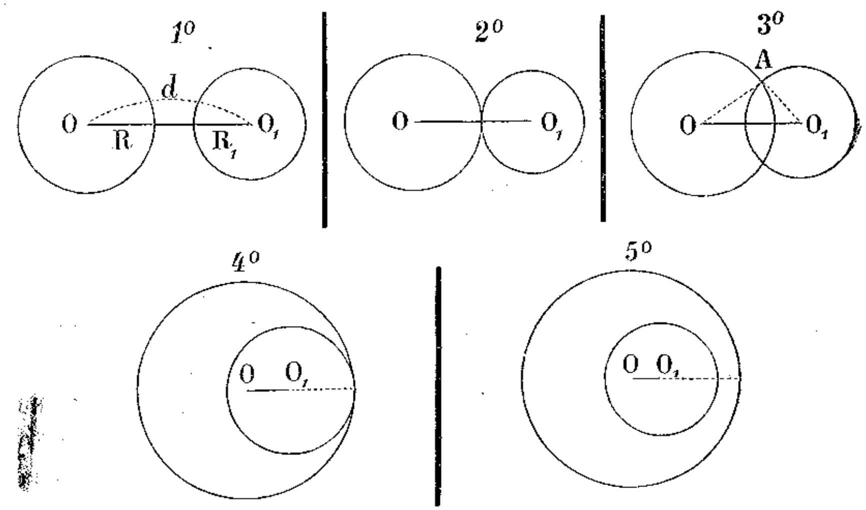
линіи центровъ, потому что въ противномъ случаѣ онѣ имѣли бы еще третью общую точку по другую сторону линіи центровъ (**133**) и, слѣд., должны были бы слиться (**109**). Онѣ не могутъ имѣть другой общей точки и на линіи центровъ, такъ какъ на этой прямой, очевидно, нѣтъ другой точки, которая отъ обоихъ центровъ была бы удалена на столько же, какъ и точка A. Слѣд., окружности имѣютъ только одну общую точку, т.-е. онѣ касаются.

2°. Пусть двѣ скружности O и O_1 (черт. 100 или 101) касаются, т.-е. онѣ имѣютъ только одну общую точку A; требуется доказать, что эта точка лежитъ на линіи центровъ или на ея продолженіи. — Точка A не можетъ лежать внѣ линіи центровъ, потому что въ противномъ случаѣ окружности пересѣклись бы (**133**).

136. Слѣдствіе. *Двѣ касательныя окружности имѣютъ общую касательную въ точкѣ касанія,* потому что прямая MN (черт. 100 или 101), перпендикулярная къ OA, перпендикулярна также и къ O_1A.

137. Признаки различныхъ случаевъ относительнаго положенія окружностей. Пусть имѣемъ двѣ окружности, которыхъ центры суть O и O_1, радіусы R и R_1 и разстояніе между центрами d. Эти окружности могутъ находиться въ слѣдующихъ 5-ти относительныхъ положеніяхъ:

1°. *Окружности лежатъ одна внѣ другой, не касаясь;* въ этомъ случаѣ, очевидно, $d > R + R_1$.



Черт. 102

2°. *Окружности имѣютъ внѣшнее касаніе;* тогда $d = R + R_1$, такъ какъ точка касанія лежитъ на линіи центровъ OO_1.

3°. *Окружности пересѣкаются;* тогда $d < R + R_1$ и $d > R - R_1$, потому что въ тр.-кѣ OAO_1 сторона OO_1 меньше суммы, но больше разности двухъ другихъ сторонъ.

4°. *Окружности имѣютъ внутреннее касаніе;* въ этомъ случаѣ $d = R - R_1$, потому что точка касанія лежитъ на продолженіи линіи OO_1.

5°. *Одна окружность лежитъ внутри другой;* тогда, очевидно, $d < R - R_1$ (въ частномъ случаѣ d можетъ равняться *нулю,* т.-е. окружности могутъ имѣть общій центръ; такія окружности наз. *концентрическими*).

138. Обратныя предложенія. Такъ какъ различные случаи расположенія двухъ окружностей сопровождаются различными соотношеніями между разстояніемъ центровъ и величиною радіусовъ, то обратныя предложенія должны быть вѣрны (**48**), а именно:

1°. *Если* $d > R + R_1$, *то окружности расположены одна внѣ другой, не касаясь.*

2°. *Если* $d = R + R_1$, *то окружности касаются извнѣ.*

3°. *Если* $d < R + R_1$ и $d > R - R_1$, *то окружности пересѣкаются.*

4°. *Если* $d = R - R_1$, *то окружности касаются извнутри.*

5°. *Если* $d < R - R_1$, *то одна окружность лежитъ внутри другой, не касаясь.*

Эти предложенія легко доказываются отъ противнаго. Напр., для доказательства перваго предложенія разсуждаемъ такъ: предположимъ противное, т.-е. что окружности *не* расположены одна внѣ другой. Тогда могутъ представиться 4 случая относительно ихъ расположенія. Какой бы изъ этихъ случаевъ мы ни взяли, ни въ одномъ изъ нихъ не будетъ такой зависимости между разстояніемъ центровъ и величиною радіусовъ, какая намъ дана условіемъ ($d > R + R_1$); значитъ, всѣ эти случаи исключаются. Остается одинъ возможный, именно тотъ, который требовалось доказать.

Такимъ образомъ, перечисленные признаки различныхъ случаевъ относительнаго положенія двухъ окружностей не только *необходимы*, но и *достаточны*.

УПРАЖНЕНІЯ.

Найти геометрическія мѣста:

101. — точекъ, изъ которыхъ касательныя, проведенныя къ данной окружности, равны данной длинѣ.

102. — точекъ, изъ которыхъ данная окружность видна подъ даннымъ угломъ (т.-е. двѣ касательныя, проведенныя изъ каждой точки къ окружности, составляютъ между собою данный уголъ).

103. — центровъ окружностей, описанныхъ даннымъ радіусомъ и касающихся данной прямой.

104. — центровъ окружностей, касающихся данной окружности въ данной точкѣ.

105. — центровъ окружностей, описанныхъ даннымъ радіусовъ и касающихся данной окружности (два случая: касаніе внѣшнее и касаніе внутреннее).

106. Прямая данной длины движется параллельно самой себѣ такъ, что одинъ ея конецъ скользитъ по окружности. Найти геом. мѣсто, описываемое другимъ концомъ.

107. Прямая данной длины движется такъ, что концы ея скользятъ по сторонамъ прямого угла. Найти геом. мѣсто, описываемое срединою этой прямой.

Доказать теоремы:

108. Если черезъ центръ окружности и данную точку внѣ ея проведемъ сѣкущую, то часть ея, заключенная между данною точкою и ближайшею точкою пересѣченія, есть кратчайшее, а часть, заключенная между данною точкою и другою точкою пересѣченія, есть наибольшее разстояніе точки отъ окружности.

109. Кратчайшее разстояніе между двумя окружностями, лежащими одна внѣ другой, есть отрѣзокъ линіи центровъ, заключенный между окружностями.

110. Изъ всѣхъ хордъ, проведенныхъ въ окружности черезъ одну точку, наименьшая есть та, которая перпендикулярна къ радіусу, проходящему черезъ эту точку.

111. Если черезъ точку пересѣченія двухъ окружностей будемъ проводить сѣкущія, не продолжая ихъ за окружности, то наибольшая изъ нихъ будетъ та, которая параллельна линіи центровъ.

112. Если къ двумъ окружностямъ, касающимся извнѣ, провести три общія касательныя, то внутренняя изъ нихъ дѣлитъ двѣ другія въ точкахъ, одинаково удаленныхъ отъ точекъ касанія.

113. Всѣ хорды данной длины, проведенныя въ данной окружности, касаются нѣкоторой другой окружности.

114. Если черезъ одну изъ точекъ пересѣченія двухъ окружностей проведемъ діаметры въ каждой окружности, то прямая, соединяющая концы ихъ, пройдетъ черезъ другую точку пересѣченія.

Задачи на построеніе:

115. Раздѣлить дугу на 4, 8, 16... равныхъ частей.

116. По суммѣ и разности дугъ найти эти дуги.

117. Изъ данной точки, какъ центра, описать такую окружность, которая раздѣлила бы данную окружность пополамъ.

118. На данной прямой найти точку, наименѣе удаленную отъ данной окружности.

119. Въ кругѣ дана хорда. Провести другую хорду, которая дѣлилась бы первою пополамъ и составляла съ нею данный уголъ.

120. Черезъ данную въ кругѣ точку провести хорду, которая дѣлилась бы этою точкою пополамъ.

121. Изъ точки, данной на сторонѣ угла, описать окружность, которая отъ другой стороны угла отсѣкала бы хорду данной длины.

122. Даннымъ радіусомъ описать окружность, которой центръ лежалъ бы на сторонѣ даннаго угла и которая отъ другой стороны его отсѣкала бы хорду данной длины.

123. Даннымъ радіусомъ описать окружность, которая касалась бы данной прямой въ данной точкѣ.

124. Описать окружность, касательную къ сторонамъ даннаго угла, причемъ одной изъ нихъ въ данной точкѣ.

125. Описать окружность, касающуюся трехъ сторонъ тр.-ника.

126. Между двумя параллельными прямыми дана точка; провести окружность, проходящую черезъ эту точку и касающуюся данныхъ прямыхъ.

127. Провести къ данной окружности касательную подъ даннымъ угломъ къ данной прямой.

128. Изъ точки, данной внѣ окружности, провести къ ней сѣкущую такъ, чтобы внутренняя ея часть равнялась данной длинѣ (изслѣдовать задачу).

129. Даннымъ радіусомъ описать окружность, проходящую черезъ данную точку и касательную къ данной прямой.

130. На данной прямой найти такую точку, чтобы касательныя, проведенныя изъ нея къ данной окружности, были данной длины.

131. Построить △, зная одинъ уголъ и двѣ высоты, изъ которыхъ одна проведена изъ вершины даннаго угла.

132. Даны двѣ окружности; провести къ нимъ сѣкущую такъ, чтобы внутреннія части ея равнялись даннымъ прямымъ.

133. Даны двѣ точки; провести прямую такъ, чтобы перпендикуляры, опущенные на нее изъ этихъ точекъ, имѣли данныя длины.

134. Описать окружность, которая проходила бы черезъ данную точку и касалась бы данной окружности въ данной точкѣ.

135. Описать окружность, которая касалась бы двухъ данныхъ параллельныхъ прямыхъ и къ кругу, находящемуся между ними.

136. Даннымъ радіусомъ описать окружность, которая касалась бы даннаго круга и проходила черезъ данную точку.

137. Даннымъ радіусомъ описать окружность, которая касалась бы данной прямой и даннаго круга.

138. Даннымъ радіусомъ описать окружность, которая отъ сторонъ даннаго угла отсѣкала бы хорды данной длины.

139. Описать окружность, касающуюся даннаго круга въ данной точкѣ и данной прямой (2 рѣшенія).

140. Описать окружность, касающуюся данной прямой въ данной точкѣ и даннаго круга (2 рѣшенія).

141. Описать окружность, касающуюся двухъ данныхъ круговъ, причемъ одного изъ нихъ въ данной точкѣ (разсмотрѣть три случая: 1, искомый кругъ лежитъ внѣ данныхъ; 2, одинъ изъ данныхъ круговъ лежитъ внѣ искомаго, другой внутри; 3, оба данные круга лежатъ внутри искомаго).

142. Описать окружность, касающуюся трехъ равныхъ круговъ извнѣ или извнутри.

143. Въ данный секторъ вписать окружность, касающуюся къ радіусамъ и дугѣ сектора.

144. Вписать въ данный кругъ три равные круга, которые касались бы попарно между собою и даннаго круга.

145. Черезъ точку внутри круга провести хорду такъ, чтобы разность ея отрѣзковъ равнялась данной длинѣ.

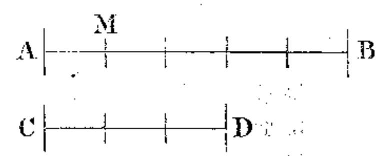
146. Черезъ точку пересѣченія двухъ окружностей провести сѣкущую такъ, чтобы часть ея, заключенная внутри окружностей, равнялась данной длинѣ.

147. Изъ точки, данной внѣ окружоости, провести сѣкущую такъ, чтобы внѣшняя ея часть равнялась внутренней.

ГЛАВА VI.

Измѣреніе величинъ.

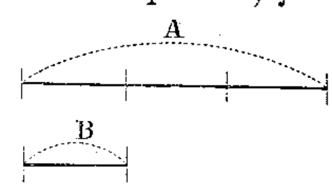
139. Общая мѣра. Общею мѣрою двухъ конечныхъ прямыхъ называется такой отрѣзокъ прямой, который въ каждой изъ нихъ содержится цѣлое число разъ. Такъ, если отрѣзокъ AM содержится въ AB и CD цѣлое число разъ (напр., 5 разъ въ AB и 3 раза въ CD), то AM есть общая мѣра AB и CD.



Черт. 103

Подобно этому можетъ быть общая мѣра двухъ дугъ одинаковаго радіуса, двухъ угловъ и вообще двухъ значеній одной и той же величины.

140. Нахожденіе наибольшей общей мѣры. Чтобы найти *наибольшую* общую мѣру двухъ конечныхъ прямыхъ, употребляютъ способъ *послѣдовательнаго дѣленія,* подобный тому, какимъ въ ариѳметикѣ находятъ общаго наибольшаго дѣлителя двухъ цѣлыхъ чиселъ. Этотъ способъ основывается на слѣдующихъ двухъ предложеніяхъ:

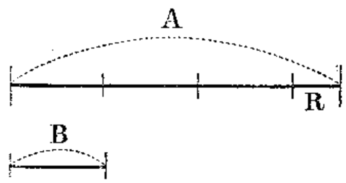


Черт. 104

1°. *Если большая прямая A содержитъ меньшую прямую B цѣлое число разъ, то B есть наибольшая общая мѣра A и B.*

Это предложеніе не требуетъ доказательства по своей очевидности (черт. 104).

2°. *Если большая прямая A содержитъ меньшую прямую B нѣкоторое число разъ съ остаткомъ R, то наиб. общая мѣра A и B есть и наиб. общая мѣра B и R.*



Черт. 105

Пусть, напр., A содержитъ B три раза съ остаткомъ R; тогда можно положить, что

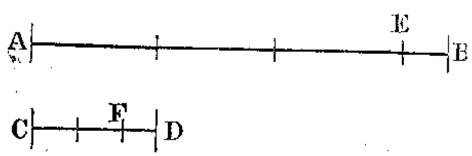
$$A = B + B + B + R$$

Изъ этого равенства мы можемъ вывести два заключенія: 1°, всякая прямая, содержащаяся цѣлое число разъ въ A и B, содержится также цѣлое число разъ и въ R; 2°, обратно: всякая прямая, содержащаяся цѣлое число разъ въ B и R, содержится также цѣлое число разъ и въ A; значитъ, у двухъ паръ прямыхъ:

$$\overbrace{A \text{ и } B} \qquad \overbrace{B \text{ и } R}$$

однѣ и тѣ же общія мѣры; поэтому у нихъ должна быть одна и та же наиб. общая мѣра.

Пусть теперь требуется найти наиб. общую мѣру прямыхъ AB и CD. Для этого на бóльшей прямой откладываемъ меньшую столько разъ, сколько можно. Если CD уложится въ AB безъ остатка, то искомая мѣра, согласно предложенію 1°, и есть CD; если же этого не произойдетъ, то, согласно предложенію 2°, вопросъ приведется къ нахожденію наиб. общей мѣры двухъ меньшихъ прямыхъ, именно CD и остатка EB. Чтобы найти ее, поступаемъ по предыдущему: откладываемъ EB на CD столько разъ, сколько можно. Если EB уложится въ CD безъ остатка, то искомая мѣра и будетъ EB; если же этого не произойдетъ, то вопросъ приведется къ нахожденію наиб. общей мѣры двухъ меньшихъ прямыхъ, именно EB и новаго остатка FD. Если, продолжая



Черт. 106

этотъ пріемъ далѣе, мы дойдемъ до того, что какой-нибудь остатокъ уложится въ предшествующемъ остаткѣ цѣлое число разъ, то этотъ остатокъ и будетъ искомая мѣра.

Чтобы удобнѣе вычислить, сколько разъ найденная общая мѣра содержится въ данныхъ прямыхъ, выписываемъ рядъ равенствъ, получаемыхъ послѣ каждаго отложенія. Положимъ, напр., что

$$AB = 3CD + EB$$

$$CD = 2EB + FD$$

$$EB = 4FD$$

Переходя въ этихъ равенствахъ отъ нижняго къ верхнему, послѣдовательно находимъ:

$$EB = 4FD; \quad CD = 2\ (4FD) + FD = 9FD;$$

$$AB = 3\ (9FD) + 4FD = 31FD.$$

Подобно этому можно находить наиб. общую мѣру двухъ дугъ одинаковаго радіуса, двухъ угловъ и т. п.

Замѣтимъ, что, найдя *наибольшую* общую мѣру, мы можемъ затѣмъ получить сколько угодно другихъ *меньшихъ* мѣръ; стоитъ только брать $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ и т. д. наибольшей мѣры.

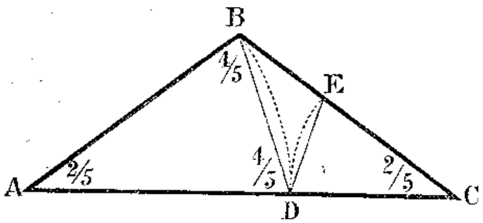
141. Соизмѣримыя и несоизмѣримыя величины. Можетъ случиться, что при нахожденіи общей мѣры мы никогда не дойдемъ до того, чтобы не получилось никакого остатка; тогда данныя прямыя не будутъ имѣть общей мѣры.

Два значенія одной величины наз. *соизмѣримыми,* если они имѣютъ общую мѣру, и *несоизмѣримыми,* когда такой мѣры не существуетъ.

На практикѣ нѣтъ возможности убѣдиться въ существованіи несоизмѣримыхъ прямыхъ, потому что, продолжая последовательное наложеніе, мы всегда дойдемъ до столь малаго остатка, который въ предшествующемъ остаткѣ, *повидимому,* укладывается цѣлое число разъ. Быть можетъ, при этомъ и долженъ былъ бы получиться нѣкоторый остатокъ, но по причинѣ *неточности* инструментовъ мы не въ состояніи его замѣтить. Однако можно доказать, что несоизмѣримыя прямыя существуютъ. Приведемъ наиболѣе простой примѣръ такихъ прямыхъ.

142. Теорема. *Если у равнобедреннаго треугольника каждый уголъ при основаніи равенъ $^2/_5 d$, то боковая сторона его несоизмѣрима съ основаніемъ.*

Пусть ABC будетъ равнобедренный тр.-къ, у котораго каждый изъ угловъ A и C равенъ $^2/_5 d$; требуется доказать, что AB несоизмѣрима съ AC.



Черт. 107

Для доказательства станемъ находить наиб. общую мѣру между AC и AB. Прежде всего опредѣлимъ, которая изъ этихъ прямыхъ больше. Для этого достаточно сравнить углы, противъ которыхъ лежатъ эти стороны. Такъ какъ, по условію, $A=C={}^2/_5 d$, то $B=2d-{}^2/_5 d-{}^2/_5 d={}^6/_5 d$; слѣд., $B>C$; поэтому $AC>AB$. Теперь найдемъ, сколько разъ въ AC можетъ уложиться AB. Такъ какъ $AC<AB+BC$ и $AB=BC$, то $AC<2AB$; значитъ, AB въ AC можетъ уложиться только *одинъ* разъ съ нѣкоторымъ остаткомъ.

Итакъ, *если у равнобедреннаго треугольника каждый уголъ при основаніи равенъ $^2/_5 d$, то боковая его сторона содержится въ основаніи одинъ разъ съ нѣкоторымъ остаткомъ.*

Замѣтивъ это, приступимъ теперь къ послѣдовательному наложенію. Отложимъ на AC часть AD, равную AB; тогда получимъ остатокъ DC, который надо накладывать на AB, или, что все равно, на BC. Чтобы узнать, сколько разъ DC уложится въ BC, соединимъ B съ D и разсмотримъ, какой будетъ $\triangle DBC$. Для этого найдемъ его углы. Такъ какъ $\triangle ABD$ равнобедренный, то его углы ABD и ADB равны; слѣд., каждый изъ нихъ равенъ $^1/_2\ (2d-A)={}^1/_2\ (2d-{}^2/_5)={}^4/_5 d$. Но уголъ ABC, какъ мы выше нашли, равенъ $^6/_5 d$; слѣд., $\angle DBC={}^6/_5 d-{}^4/_5 d={}^2/_5 d$. Такимъ об-

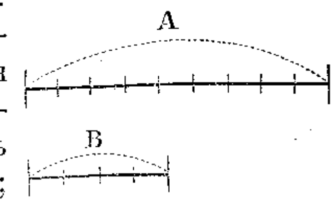
разомъ, у тр.-ка DBC есть два равныхъ угла при BC; слѣд., онъ равнобедренный, при чемъ каждый уголъ при его основаніи BC равенъ $^2/_5 d$. Вслѣдствіе этого, по доказанному выше, боковая сторона его DC уложится въ основаніи BC *одинъ разъ съ нѣкоторымъ остаткомъ*. Пусть этотъ остатокъ будетъ EB. Соединивъ E съ D, мы снова получимъ равнобедренный тр.-къ BDE, у котораго каждый уголъ при основаніи BD равенъ $^2/_5 d$. Къ этому тр.-ку можно примѣнить тѣ же разсужденія; значитъ, его бокъ EB содержится въ основаніи BD (или, все равно, въ DC) *одинъ разъ съ нѣкоторымъ остаткомъ*. Продолжая эти разсужденія далѣе, мы постоянно будемъ приходить къ равноб. тр.-ку, у котораго углы при основаніи равны $^2/_5 d$, и, слѣд., *постоянно будемъ получать остатки*. Изъ этого слѣдуетъ, что AB несоизмѣрима съ AC.

Подобно этому можно доказать, что *діагональ квадрата несоизмѣрима съ его стороною.*

143. Понятіе объ измѣреніи. Чтобы составить себѣ ясное представленіе о данной длинѣ, ее измѣряютъ при помощи другой, извѣстной намъ, длины, напр., посредствомъ *метра*. Эта извѣстная длина, съ которой сравниваютъ другія длины, наз. *единицей* длины. При измѣреніи могутъ представиться два различныхъ случая: или измѣряемая длина соизмѣрима съ единицей, или несоизмѣрима съ ней.

1°. *Измѣрить длину, соизмѣримую съ единицей, значитъ узнать, сколько разъ въ ней содержится единица или доля единицы.*

Пусть, напр., надо измѣрить какую-нибудь длину A при помощи единицы B, соизмѣримой съ A. Тогда находятъ ихъ общую мѣру и узнаютъ, сколько разъ она содержится въ B и A. Если общей мѣрой окажется сама единица B, то результатъ измѣренія выразится *цѣлымъ* числомъ; такъ, когда B содержится въ A три раза, то говорятъ, что длина A равна 3 ед. Если же общей мѣрой будетъ доля B, то результатъ

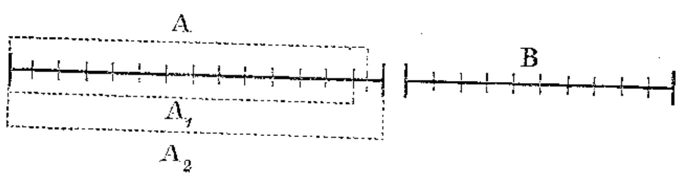


Черт. 108

измѣренія выразится *дробнымъ* числомъ; такъ, если общая мѣра есть $^1/_4$ доля B и она содержится въ A девять разъ (какъ изображено на черт. 108), то говорятъ, что длина A равна $^9/_4$ единицы.

Число, получившееся послѣ измѣренія, наз. часто *мѣрою* того значенія величины, которое измѣрялось. Числа цѣлыя и дробныя наз. *соизмѣримыми числами.*

2°. Когда данная длина A несоизмѣрима съ единицей B, тогда измѣреніе выполняется косвенно: вмѣсто длины A измѣряютъ двѣ другія длины, *соизмѣримыя съ единицей,* изъ которыхъ одна меньше, а другая больше A, и которыя разнятся отъ A такъ мало, какъ угодно. Чтобы найти такія соизмѣримыя длины, поступаютъ такъ: положимъ, что мы желаемъ найти соизмѣримыя длины, которыя отличались бы отъ A меньше, чѣмъ на $^1/_{10}$ единицы. Тогда дѣлимъ единицу B на 10 равныхъ частей (черт. 109) и одну такую долю укладываемъ въ длинѣ A столько разъ, сколько можно. Пусть она уложится 13 разъ съ нѣкоторымъ остаткомъ, меньшимъ



Черт. 109

$^1/_{10}B$. Тогда мы будемъ имѣть длину A_1, соизмѣримую съ единицей и меньшую, чѣмъ A. Отложивъ $^1/_{10}B$ еще одинъ разъ, получимъ другую длину A_2, тоже соизмѣримую съ единицей, но бо́льшую, чѣмъ A_1, и которая разнится отъ A менѣе, чѣмъ на $^1/_{10}$ единицы. Длины A_1 и A_2 выражаются числами $^{13}/_{10}$ и $^{14}/_{10}$. Эти числа разсматриваются, какъ *приближенныя мѣры* длины A, первое съ недостаткомъ, второе съ избыткомъ; причемъ, такъ какъ длина A разнится отъ A_1 и A_2 менѣе, чѣмъ на $^1/_{10}$ единицы, то каждое изъ этихъ чиселъ выражаетъ длину A *съ точностью до* $^1/_{10}$.

Вообще, чтобы найти приближенныя мѣры длины A съ точностью до $^1/_n$ единицы, дѣлятъ единицу B на n равныхъ частей и узнаютъ, сколько разъ $^1/_n$ доля содержится въ A;

если она содержится болѣе m разъ, то менѣе $m+1$ разъ, то числа $^m/_n$ и $^{m+1}/_n$ будутъ приближенныя мѣры A съ точностью до $^1/_n$, первое съ недостаткомъ, второе съ избыткомъ.

Предположимъ теперь, что число n равныхъ частей, на которыя мы дѣлимъ единицу B, неограниченно увеличивается (напр., $n=10, 100, 1000$ и т. д.); тогда разность между длиною A и каждою изъ соизмѣримыхъ длинъ A_1 и A_2 будетъ все болѣе и болѣе уменьшаться и можетъ сдѣлаться такъ малой, какъ угодно. Это выражаютъ такъ: *при неограниченномъ возрастаніи числа равныхъ частей, на которыя мы дѣлимъ единицу B, соизмѣримыя длины A_1 и A_2 стремятся къ общему предѣлу, который есть несоизмѣримая длина A.* Числа, выражающія длины A_1 и A_2, также при этомъ стремятся къ нѣкоторому общему предѣлу, называемому *несоизмѣримымъ числомъ.* Это число принимаютъ за точную мѣру несоизмѣримой длины A.

Сказанное объ измѣреніи длины прямой вполнѣ примѣнимо къ измѣренію всякой величины, напр., дуги, угла и пр.

144. Отношеніе. *Отношеніемъ двухъ значеній A и B одной и той же величины наз. число, измѣряющее A, когда B принято за единицу.*

Такъ, если говорятъ, что отношеніе прямой A къ другой прямой B есть $2^3/_4$, то это значитъ, что A равна $2^3/_4$ B, т.-е. A содержитъ въ себѣ 2 раза B, причемъ получается остатокъ, равный $^3/_4$ B.

Когда A соизмѣримо съ B, отношеніе A къ B можно выразить точно, цѣлымъ или дробнымъ числомъ; въ противномъ случаѣ его выражаютъ приближенно съ желаемою точностью. Такъ, если хотятъ найти отношеніе A къ B съ точностью до $^1/_{10}$, то дѣлятъ B на 10 равныхъ частей и узнаютъ наибольшее содержаніе $^1/_{10}$ B въ A; если это будетъ, положимъ, число 27, то $^{27}/_{10}$ или $^{28}/_{10}$ будутъ приближенныя значенія отношенія A къ B, съ точностью до $^1/_{10}$, первое съ недостаткомъ, второе съ избыткомъ.

Когда A несоизмѣримо съ B, отношеніе между ними называютъ *несоизмѣримымъ.*

Два несоизмѣримыя отношенія считаются равными, если равны ихъ приближенныя значенія, вычисленныя съ произвольною, но одинаковою точностью.

145. Свойства отношеній. Если A и B измѣрены при помощи одной и той же единицы C, то отношеніе A къ B можно выразить *частнымъ* отъ дѣленія числа, измѣряющаго A, на число, измѣряющее B (это частное, какъ извѣстно изъ ариѳметики, наз. *кратнымъ* или *геометрическимъ отношеніемъ* двухъ чиселъ). Напр., положимъ, что $A = {}^7/_2 C$ и $B = {}^5/_3 C$. Приведя эти дроби къ общему знаменателю, получимъ:

$$A = \frac{21}{6} C \qquad B = \frac{10}{6} C$$

Отсюда видно, что ${}^1/_6$ доля C содержится 10 разъ въ B и 21 разъ въ A; значитъ, ${}^1/_{10}$ доля B содержится въ A ровно 21 разъ, т.-е. отношеніе A къ B есть число ${}^{21}/_{10}$. Но это число получится, когда ${}^{21}/_6$ раздѣлимъ на ${}^{10}/_6$; значитъ:

$$\text{отношеніе } A \text{ къ } B = \frac{21}{6} : \frac{10}{6} = \frac{7}{2} : \frac{5}{3} = \frac{21}{10}.$$

Вообще, если измѣривъ A и B при помощи одной и той же единицы C, мы получимъ для A число m, а для B число n, то

$$\text{отношеніе } A \text{ къ } B = \frac{m}{n} \text{ *)}.$$

Вслѣдствіе этого отношеніе A къ B принято обозначать помощью тѣхъ же знаковъ, какіе употребляются для обозначенія отношенія чиселъ, а именно такъ:

$$A : B \text{ или } \frac{A}{B}.$$

Когда члены отношенія выражены числами, то къ нему могутъ быть отнесены всѣ свойства числовыхъ отношеній. Напр., если имѣемъ два равныя отношенія (т.-е. пропорцію), то произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ, и т. п.

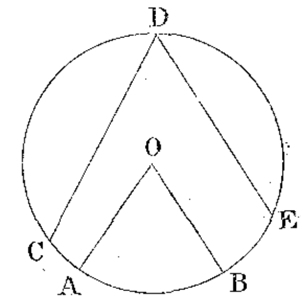
---

*) Въ алгебрѣ доказывается, что это вѣрно и тогда, когда числа m и n несоизмѣримыя. См. напр. „Элементарная алгебра", сост. А. Киселевъ, 2-ое изданіе, стр. 161.

ГЛАВА VII.

Измѣреніе угловъ помощью дугъ.

146. Опредѣленія. Уголъ AOB, образованный двумя радіусами, наз. *центральнымъ* угломъ; уголъ CDE, образованный двумя хордами, исходящими изъ одной точки окружности, наз. *вписаннымъ* угломъ.



Черт. 110

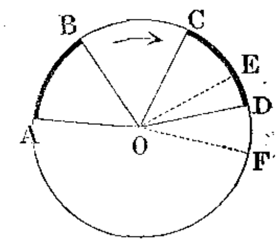
О центральномъ углѣ и дугѣ, заключенной между его сторонами, говорятъ, что они *соотвѣтствуютъ* другъ другу; о вписанномъ углѣ говорятъ, что онъ *опирается* на дугу, заключенную между его сторонами.

147. Теоремы. *Въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ:*

1°, *если центральные углы равны, то и соотвѣтствующія имъ дуги равны;*

2°, *если центральные углы не равны, то большему изъ нихъ соотвѣтствуетъ большая дуга.*

Пусть AOB и COD будутъ два центральные угла, равные или неравные. Повернемъ секторъ AOB вокругъ центра въ направленіи, указанномъ стрѣлкою, на столько, чтобы радіусъ OA совмѣстился съ OC. Тогда, если центральные углы равны, то радіусъ OB совпадетъ съ OD и дуга AB съ дугою CD; значитъ, эти дуги будутъ равны; если же центральные углы не равны, то радіусъ OB пойдетъ не по OD, а по какому-нибудь иному направленію, напр. по OE или по OF; въ томъ и другомъ случаѣ бо́льшему углу, очевидно, будетъ соотвѣтствовать бо́льшая дуга.



Черт. 111

Теорема, доказанная нами для *одного* круга, остается вѣрною *для равныхъ круговъ*, потому что такіе круги ничѣмъ другъ отъ друга не отличаются, кромѣ своего положенія.

148. Обратныя предложенія. Такъ какъ различные случаи относительно величины двухъ центральныхъ угловъ сопровождаются различными выводами относительно величины соотвѣтствующихъ дугъ, то обратныя предложенія должны быть вѣрны (**48**), а именно:

Въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ:

1°, *если дуги равны, то и соотвѣтствующіе имъ центральные углы равны;*

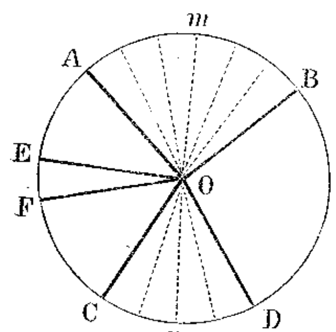
2°, *если дуги не равны, то большей изъ нихъ соотвѣтствуетъ бóльшій центральный уголъ.*

Доказательство отъ противнаго предоставляемъ самимъ учащимся.

149. Теорема. *Въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ центральные углы относятся, какъ соотвѣтствующія имъ дуги.*

Пусть AOB и COD будутъ два центральные угла; требуется доказать, что

$$\angle AOB : \angle COD = \smile AB : \smile CD.$$



Черт. 112

1°. Допустимъ сначала, что дуги AB и CD соизмѣримы, т.-е. имѣютъ общую мѣру. Положимъ, что эта общая мѣра содержится m разъ въ дугѣ AB и n разъ въ CD; тогда

$$\smile AB : \smile CD = m : n \qquad [1].$$

Соединивъ точки дѣленія дугъ съ центромъ, мы раздѣлимъ центральные углы на равныя части (равнымъ дугамъ соотвѣтствуютъ равные центральные углы). Такъ какъ этихъ частей будетъ m въ углѣ AOB и n въ углѣ COD, то

$$\angle AOB : \angle COD = m : n \qquad [2].$$

Сравнивая пропорціи [1] и [2], замѣчаемъ, что вторыя отношенія у нихъ равны; слѣд., равны и первыя отношенія, т.-е.

$$\angle AOB : \angle COD = \smile AB : \smile CD.$$

2°. Предположимъ теперь, что дуги AB и CD несоизмѣримы. Тогда и соотвѣтствующіе имъ центральные углы будутъ также несоизмѣримы. Дѣйствительно, если бы углы имѣли какую-нибудь общую мѣру, напр. уголъ EOF, то и дуги имѣли бы общую мѣру, именно дугу EF, что противорѣчитъ условію. Чтобы доказать равенство двухъ несоизмѣримыхъ отношеній, достаточно доказать равенство ихъ приближенныхъ значеній, вычисленныхъ съ произвольною, но одинаковою, точностью (**144**). Найдемъ приближенное значеніе отношенія дугъ AB и CD съ точностью до $^1/_n$. Для этого раздѣлимъ CD на n равныхъ частей и одну часть отложимъ на AB столько разъ, сколько можно. Пусть $^1/_n$ доля CD содержится въ AB болѣе m разъ, но менѣе $m+1$ разъ; тогда

$$\text{прибл. отнош. } \frac{\smile AB}{\smile CD} = \frac{m}{n} \text{ (съ нед.).}$$

Соединивъ точки дѣленія дугъ съ центромъ, мы раздѣлимъ уголъ COD на n такихъ равныхъ частей, какихъ въ углѣ AOB содержится болѣе m, но менѣе $m+1$; слѣд.:

$$\text{прибл. отнош. } \frac{\angle AOB}{\angle COD} = \frac{m}{n} \text{ (съ нед.).}$$

Сравнивая приближенныя отношенія угловъ и дугъ, видимъ, что они равны при всякомъ n; а въ этомъ и состоитъ равенство несоизмѣримыхъ отношеній.

150. Опредѣленіе. Двѣ зависящія другъ отъ друга величины наз. *пропорціанальными*, если зависимость между ними состоитъ въ слѣдующемъ: 1°, каждому значенію одной величины соотвѣтствуетъ только *одно* значеніе другой величины; 2°, отношеніе двухъ какихъ бы то ни было значеній одной величины равно отношенію соотвѣтствующихъ значеній другой величины.

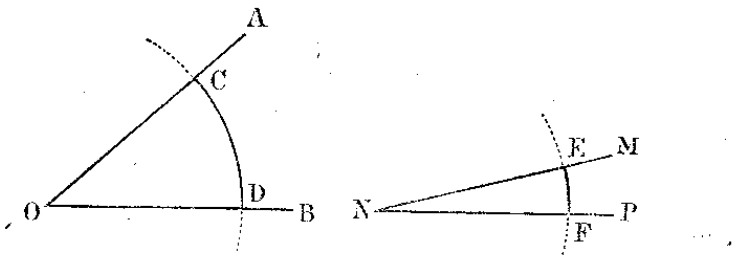
Изъ предыдущихъ теоремъ слѣдуетъ, что *центральный уголъ пропорціоналенъ соотвѣтствующей ему дугѣ.*

151. Измѣреніе угловъ. Измѣреніе угловъ сводится на измѣреніе соотвѣтствующихъ ихъ дугъ слѣдующимъ образомъ.

За единицу угловъ берутъ уголъ, составляющій $^1/_{90}$ часть прямого угла; эту единицу называютъ *угловымъ градусомъ*.

За единицу дугъ одинаковаго радіуса берутъ такую дугу того же радіуса, которая соотвѣтствуетъ центральному углу, равному угловому градусу. Такая дуга наз. *дуговымъ градусомъ*. Такъ какъ прямому центральному углу соотвѣтствуетъ $^1/_4$ окружности, то угловому градусу соотвѣтствуетъ $^1/_{90}$ четверти окружности; значитъ, дуговой градусъ есть $^1/_{360}$ цѣлой окружности.

Пусть требуется измѣрить уголъ AOB, т.-е. найти отношеніе этого угла къ угловому градусу MNP. Для этого



Черт. 113

опишемъ изъ вершинъ угловъ дуги CD и EF произвольнымъ, но одинаковымъ радіусомъ. Тогда (**149**) будемъ имѣть:

$$\angle AOB : \angle MNP = \smile CD : \smile EF.$$

Лѣвое отношеніе этой пропорціи есть число, измѣряющее уголъ AOB въ угловыхъ градусахъ (**144**); правое отношеніе есть число, измѣряющее дугу CD въ дуговыхъ градусахъ. Слѣд., эту пропорцію можно высказать такъ:

Число, измѣряющее уголъ въ угловыхъ градусахъ, равно числу, измѣряющему соотвѣтствующую дугу въ дуговыхъ градусахъ.

Для краткости эту фразу выражаютъ обыкновенно такъ:

Уголъ измѣряется соотвѣтствующей ему дугой.

152. Подраздѣленіе градусовъ. Градусы угла и дуги подраздѣляются на 60 равныхъ частей, называемыхъ *минутами* (угловыми или дуговыми); минуту подраздѣляютъ на 60 равныхъ частей, называемыхъ *секундами* (угловыми или дуговыми).

Изъ сказаннаго выше слѣдуетъ, что въ углѣ содержится столько угловыхъ градусовъ, минутъ и секундъ, сколько въ соотвѣтствующей ему дугѣ заключается дуговыхъ градусовъ, минутъ и секундъ. Если, напр., въ дугѣ CD (черт. 113) содержится 40 град. 25 мин. и 13,5 секунды (дуговыхъ), то и въ углѣ AOB заключается 40 град. 25 мин. 13,5 сек. (угловыхъ); это выражаютъ сокращенно такъ:

$$\angle AOB = 40°25'13{,}5''$$

обозначая значками (°), (′) и (″) соотвѣтственно градусы, минуты и секунды.

153. Такъ какъ прямой уголъ содержитъ 90°, то:

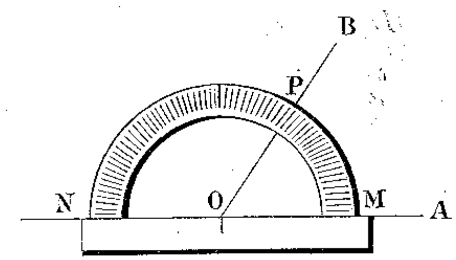
1°, сумма угловъ тр.-ка равна 180°;

2°, сумма острыхъ угловъ прямоугольнаго тр.-ка равна 90°;

3°, каждый уголъ равносторонняго тр.-ка равенъ 60°;

4°, сумма угловъ выпуклаго многоугольника, имѣющаго n сторонъ, равна $180°(n-2)$; и т. п.

154. Транспортиръ. Такъ наз. приборъ, употребляемый для измѣренія угловъ. Онъ представляетъ собою полукругъ, котораго дуга раздѣлена на 180 градусовъ. Чтобы измѣрить уголъ AOB, накладываютъ на него приборъ такъ, чтобы центръ полукруга совпадалъ съ вершиною угла, а радіусъ OM совпадалъ со стороною OA. Число градусовъ, содержащееся въ дугѣ PM, покажетъ величину угла AOB. При помощи транспортира можно также чертить уголъ, содержащій данное число градусовъ.



Черт. 114

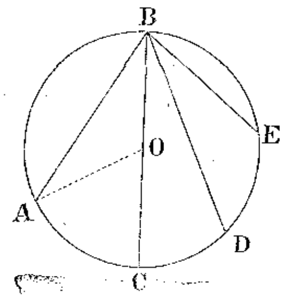
Конечно, на такомъ приборѣ нѣтъ возможности отсчитывать не только секунды, но и минуты; построеніе и измѣреніе можно выполнять только приближенно.

155. Теорема. *Вписанный уголъ измѣряется половиною дуги, на которую онъ опирается.*

Эту теорему надо понимать такъ: вписанный уголъ содержитъ въ себѣ столько угловыхъ градусовъ, минутъ и секундъ, сколько въ половинѣ дуги, на которую онъ опирается, заключается дуговыхъ градусовъ, минутъ и секундъ

При доказательствѣ теоремы разсмотримъ особо три случая:

1°, *центръ* O (черт. 115) *лежитъ на сторонѣ вписаннаго угла* ABC.—Проведя радіусъ AO, мы получимъ $\triangle ABO$, въ которомъ $OA = OB$ (какъ радіусы) и, слѣд., $\angle ABO = \angle BAO$. По отношенію къ этому тр.-ку уголъ AOC есть внѣшній; поэтому онъ равенъ суммѣ угловъ ABO и BAO, или равенъ двойному углу ABO; значитъ, уг. ABO равенъ *половинѣ* центральнаго угла AOC. Но послѣдній измѣряется дугою AC (**151**); слѣд., вписанный уголъ ABO измѣряется половиною дуги AC.



Черт. 115

2°, *центръ* O *лежитъ между сторонами вписаннаго угла* ABD (черт. 115).

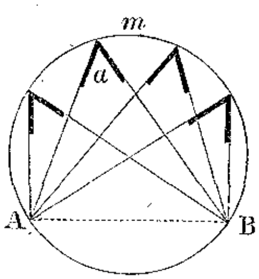
Проведя діаметръ BC, мы раздѣлимъ уголъ ABD на два угла, изъ которыхъ, по доказанному въ первомъ случаѣ, одинъ измѣряется половиною дуги AC, а другой—половиною дуги CD; слѣд., уголъ ABD измѣряется $\frac{1}{2}(AC+CD)$, т.-е. $\frac{1}{2}AD$.

3°, *центръ* O *лежитъ внѣ вписаннаго угла* DBE (черт. 115).

Проведя діаметръ BC, мы будемъ имѣть:

$$\angle DBE = \angle CBE - \angle CBD.$$

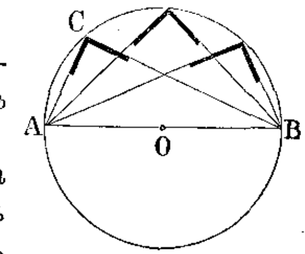
Но углы CBE и CBD измѣряются, по доказанному, половинами дугъ CE и CD; слѣд., уг. DBE измѣряется $\frac{1}{2}(CE-CD)$, т.-е. половиною дуги DE.



Черт. 116

156. Слѣдствіе 1°. *Вписанные углы, опирающіеся на одну и ту же дугу, равны* (черт. 116), потому что каждый изъ нихъ измѣряется половиною одной и той же дуги. Если величину одного изъ такихъ угловъ обозначимъ a, то можно сказать, что сегментъ AmB *вмѣщаетъ въ себѣ уголъ, равный* a.

157. Слѣдствіе 2°. *Вписанный уголъ, опирающійся на діаметръ, есть прямой* (черт. 117), потому что каждый такой уголъ измѣряется половиною полуокружности и, слѣд., содержитъ 90°.

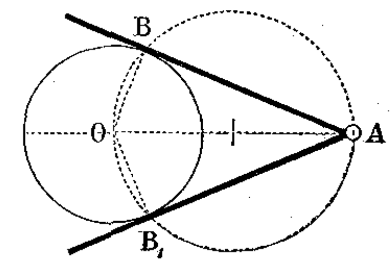


Черт. 117

158. Задача. *Построить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ* AB *и катету* AC (черт. 117).

На основаніи слѣдствія 2° эта задача рѣшается такъ: на гипотенузѣ AB, какъ на діаметрѣ, описываемъ полуокружность и изъ конца A проводимъ хорду AC, равную данному катету. Тр.-къ ACB будетъ искомый.

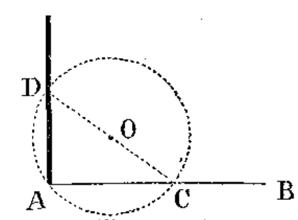
Это построеніе можно, между прочимъ, примѣнить въ томъ случаѣ, когда *изъ данной точки* A *требуется провести касательную къ данной окружности* O (см. § 126). Соединивъ A съ O, строятъ указаннымъ способомъ на прямой AO, какъ на гипотенузѣ, прямоугольный тр.-къ ABO, у котораго катетъ OB есть радіусъ данной окружности. Другой катетъ AB будетъ касательной, потому что онъ перпендикуляренъ къ радіусу OB въ концѣ его, лежащемъ на окружности.



Черт. 118

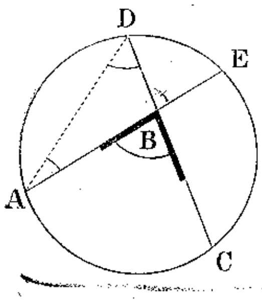
159. Задача. *Изъ конца* A *данной прямой* AB, *не продолжая ея, возставить къ ней перпендикуляръ* (черт. 119).

Взявъ внѣ прямой произвольную точку O, опишемъ изъ нея радіусомъ OA окружность; черезъ точку C, въ которой эта окружность пересѣкается съ прямой AB, проведемъ діаметръ CD и конецъ его D соединимъ съ A. Прямая AD будетъ искомый перпендикуляръ, потому что уголъ A прямой, такъ какъ онъ вписанный и опирается на діаметръ.



Черт. 119

160. Теорема. *Уголъ, вершина котораго лежитъ внутри* *круга, измѣряется полусуммою дугъ, изъ которыхъ одна заключена между его сторонами, а другая между продолженіями сторонъ.*



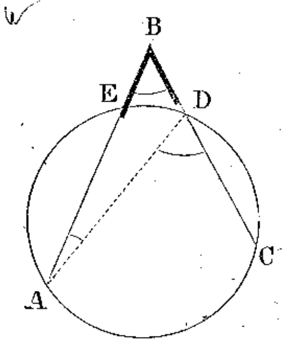
Черт. 120

Пусть вершина угла ABC лежитъ внутри круга. Продолживъ его стороны до пересѣченія съ окружностью въ точкахъ D и E, докажемъ, что этотъ уголъ измѣряется половиною суммы дугъ AC и DE.—Проведя хорду AD, мы получимъ $\triangle ADB$, относительно котораго уголъ ABC есть внѣшній; слѣд.:

$$\angle ABC = \angle A + \angle D.$$

Но углы A и D, какъ вписанные, измѣряются половинами дугъ DE и AC; поэтому уголъ ABC измѣряется полусуммою этихъ дугъ.

161. Теорема. *Уголъ, вершина котораго лежитъ внѣ круга, измѣряется полуразностью дугъ, заключенныхъ между его сторонами.*



Черт. 121

Пусть вершина угла ABC лежитъ внѣ круга. Требуется доказать, что этотъ уголъ измѣряется половиною разности дугъ AC и ED.—Проведя хорду AD, мы получимъ $\triangle ABD$, относительно котораго уголъ ADC есть внѣшній; слѣд.:

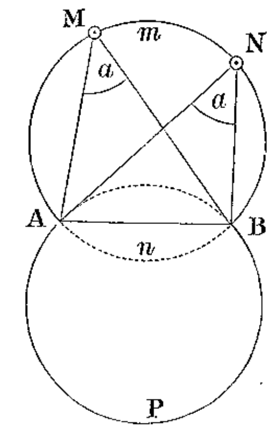
$$\angle B = \angle ADC - \angle A.$$

Но углы ADC и A, какъ вписанные, измѣряются половинами дугъ AC и ED; поэтому уголъ B измѣряется полуразностью этихъ дугъ.

162. Слѣдствіе. *Геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ данный отрѣзокъ прямой виденъ подъ даннымъ угломъ a и которыя расположены по одну сторону отъ этого отрѣзка, есть дуга сегмента, вмѣщающаго уголъ a.*

Пусть M будетъ одна изъ точекъ, изъ которыхъ данный отрѣзокъ AB виденъ подъ угломъ a, т.-е. допустимъ, что прямыя

MA и MB образуютъ уголъ a. Проведемъ черезъ точки A, M и B окружность. Тогда часть этой окружности, именно AmB, будетъ искомымъ геометрическимъ мѣстомъ. Дѣйствительно, изъ каждой точки этой дуги прямая AB видна подъ угломъ a, потому что всѣ вписанные углы, опирающіеся на AB, равны углу AMB, который есть a. Обратно: всякая точка, напр. N, изъ которой прямая AB видна подъ угломъ a, и которая расположена по ту же сторону отъ AB, какъ и точка M, должна находиться на дугѣ сегмента AmB, потому что въ противномъ случаѣ уголъ ANB не измѣрялся бы половиною дуги AnB (**160** и **161**) и слѣд., не былъ бы равенъ a.



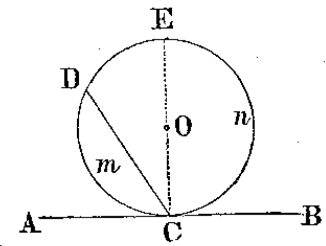
Черт. 122

По другую сторону отъ AB существуютъ также точки, изъ которыхъ эта прямая видна подъ угломъ a; онѣ расположены на дугѣ сегмента APB, равнаго сегменту AmB, но расположеннаго по противоположную сторону отъ AB.

163. Теорема. *Уголъ, составленный касательною и хордой, измѣряется половиною дуги, заключенной внутри его.*

Пусть уголъ ACD составленъ касательною AC и хордою CD; требуется доказать, что этотъ уголъ измѣряется половиною дуги CmD.—Проведя діаметръ CE, будемъ имѣть:

$$\angle ACD = \angle ACE - \angle DCE.$$

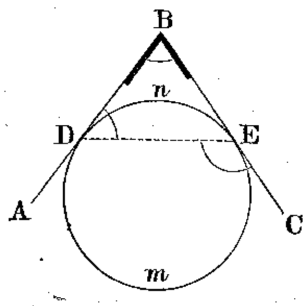


Черт. 123

Уголъ ACE, какъ прямой (**124**), измѣряется половиною полуокружности CmE; уголъ DCE, какъ вписанный, измѣряется половиною дуги DE; слѣд., уголъ ACD измѣряется полуразностью дугъ CmE и DE, т.-е. половиною дуги DC.

Подобнымъ образомъ можно доказать, что уголъ BCD, также составленный касательною и хордой, измѣряется половиною дуги CnD; разница въ доказательствѣ будетъ только та, что этотъ уголъ надо разсматривать не какъ разность, а какъ сумму прямого угла BCE и остраго ECD.

164. Теорема. *Уголъ, составленный двумя касательными, измѣряется полуразностью дугъ, заключенныхъ между точками касанія.*



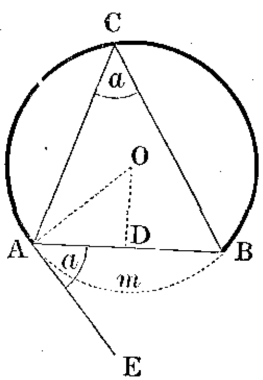
Черт. 124

Пусть уголъ ABC составленъ двумя касательными; требуется доказать, что онъ измѣряется половиною разности дугъ DmE и DnE (D и E суть точки касанія).—Проведя хорду DE, мы получимъ $\triangle DBE$, относительно котораго уголъ CED есть внѣшній; слѣд.:

$$\angle B = \angle CED - \angle BDE.$$

Но углы CED и BDE, какъ составленные касательною и хордою, измѣряются соотвѣтственно половинами дугъ EmD и DnE; поэтому уголъ B измѣряется полуразностью этихъ дугъ.

165. Задача. *На данной прямой AB построить сегментъ, вмѣщающій данный уголъ a* (черт. 125).



Черт. 125

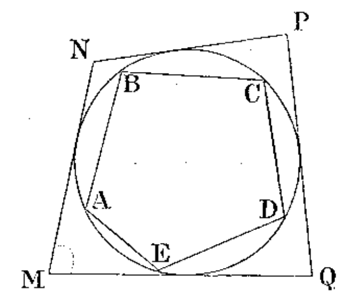
Предположимъ, что задача рѣшена; пусть сегментъ ACB будетъ такой, который вмѣщаетъ въ себѣ уголъ a. Центръ O этого сегмента долженъ лежать на перпендикулярѣ DO, возстановленномъ изъ средины прямой AB. Съ другой стороны онъ долженъ лежать и на перпендикулярѣ AO, возстановленномъ къ касательной AE изъ точки касанія A. Поэтому положеніе центра опредѣлится, если мы съумѣемъ построить касательную AE. Уголъ BAE, составленный касательною и хордою, измѣряется половиною дуги AmB; вписанный уголъ ACB также измѣряется половиною этой дуги; значитъ, $\angle BAE = \angle ACB$. Но послѣдній уголъ, по условію, долженъ равняться a; слѣд., и $\angle BAE = a$, а потому положеніе касательной AE опредѣлено. Отсюда выводимъ слѣдующее по-

строеніе: при концѣ прямой AB строимъ уголъ BAE, равный углу a; къ срединѣ прямой AB возстановляемъ перпендикуляръ DO и изъ точки A перпендикуляръ къ AE. Пересѣченіе этихъ двухъ перпендикуляровъ принимаемъ за центръ и радіусомъ OA описываемъ окружность. Сегментъ ACB будетъ искомый, потому что всякій вписанный въ немъ уголъ равенъ углу BAE, т.-е. углу a.

ГЛАВА VIII.

Вписанные и описанные многоугольники.

166. Опредѣленіе. Если вершины какого-нибудь многоугольника $ABCDE$ лежатъ на окружности, то говорятъ, что этотъ мн.-къ *вписанъ* въ окружность, или что окружность *описана* около него.



Черт. 126

Если стороны какого-нибудь многоугольника $MNPQ$ касаются окружности, то говорятъ, что этотъ мн.-къ *описанъ* около окружности, или что окружность *вписана* въ него.

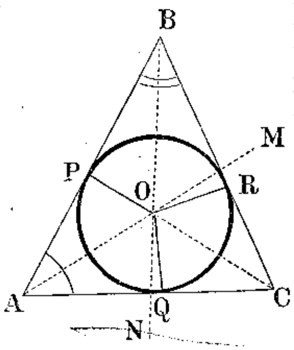
167. Теоремы. 1°. *Около всякаго треугольника можно описать окружность и притомъ только одну.*

2°. *Во всякій треугольникъ можно вписать окружность и притомъ только одну.*

Пусть ABC будетъ какой нибудь тр.-къ; требуется доказать: 1°, что около него можно описать окружность и притомъ только одну и 2°, что въ него можно вписать окружность и притомъ только одну.

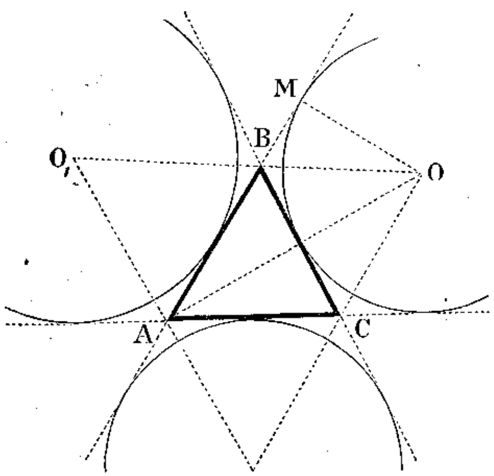
1°. Вершины A, B и C суть три точки, не лежащія на одной прямой; а черезъ такія точки, какъ мы видѣли (**109**), всегда можно провести окружность и притомъ только одну.

2°. Если возможна такая окружность, которая касалась бы всѣхъ сторонъ тр.-ка ABC, то ея центръ долженъ быть точкой, одинаково удаленной отъ этихъ сторонъ. Докажемъ, что такая точка существуетъ. Геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ сторонъ AB и AC, есть биссектрисса AM угла A (**63**); геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ сторонъ BA и BC, есть биссектрисса BN угла B. Эти двѣ биссектриссы, находясь внутри замкнутаго пространства (треугольника), должны пересѣчься внутри его, въ нѣкоторой точкѣ O. Эта точка и будетъ равноудаленной отъ сторонъ тр.-ка, такъ какъ она заразъ находится на обоихъ геометрич. мѣстахъ.



Черт. 127

Итакъ, чтобы вписать кругъ въ тр.-къ, дѣлимъ какіе-нибудь два угла его, напр. A и B, пополамъ и точку пересѣченія биссектриссъ беремъ за центръ. Радіусомъ будетъ служить одинъ изъ перпендикуляровъ OP, OQ, OR, опущенныхъ изъ центра на стороны тр.-ка. Окружность касается сторонъ въ точкахъ P, Q, R, такъ какъ стороны въ этихъ точкахъ перпендикулярны къ радіусамъ (**123**). Другой вписанной окружности не можетъ быть, такъ какъ двѣ биссектриссы могутъ пересѣчься только въ одной точкѣ, а изъ одной точки на прямую можно опустить только одинъ перпендикуляръ.



Черт. 128

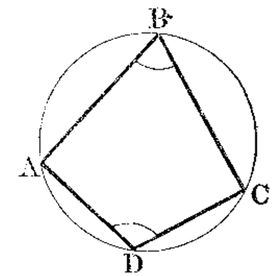
168. Слѣдствіе. Точка O, находясь на одинаковомъ разстояніи отъ сторонъ AC и BC (черт. 127), должна лежать на биссектриссѣ угла C (**61**); слѣд.: *биссектриссы трехъ угловъ треугольника сходятся въ одной точкѣ.*

169. Внѣвписанные круги. Такъ называются круги (черт. 128), которые касаются одной сто-

роны тр.-ка и *продолженій* двухъ другихъ сторонъ (они лежатъ *внѣ* тр.-ка, вслѣдствіе чего и получили названіе *внѣвписанныхъ*). Такихъ круговъ для всякаго треугольника можетъ быть три. Чтобы построить ихъ, проводятъ биссектриссы внѣшнихъ угловъ тр.-ка ABC и точки ихъ пересѣченій берутъ за центры. Такъ, центромъ окружности, вписанной въ уголъ A, будетъ точка O, т.-е. пересѣченіе биссектриссъ BO и CO внѣшнихъ угловъ, не смежныхъ съ A; радіусомъ этой окружности будетъ перпендикуляръ OM, опущенный изъ O на какую-либо сторону треугольника.

170. Теоремы. 1°. *Во всякомъ вписанномъ четыреугольникѣ сумма противоположныхъ угловъ равна двумъ прямымъ.*

2°. Обратно: *около четыреугольника можно описать окружность, если въ немъ сумма противоположныхъ угловъ равна двумъ прямымъ.*



Черт. 129

1°. Пусть $ABCD$ будетъ вписанный четыреугольникъ; требуется доказать, что

$$\angle B + \angle D = 2d \quad \text{и} \quad \angle A + \angle C = 2d.$$

Углы B и D, какъ вписанные, измѣряются: первый — половиною дуги ADC, второй — половиною дуги ABC; слѣд., сумма $B+D$ измѣряется полусуммою дугъ ADC и ABC, т.-е. половиною окружности; значитъ, $B+D=2d$. Подобно этому убѣдимся, что $A+C=2d$.

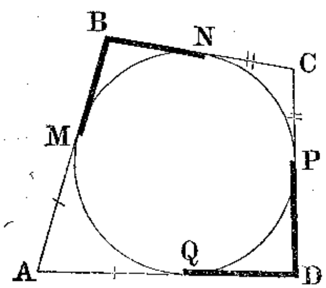
2°. Пусть $ABCD$ (черт. **129**) будетъ такой четыреугольникъ, у котораго $B+D=2d$. Требуется доказать, что около такого четыреугольника можно описать окружность. — Черезъ какія-нибудь три его вершины, напр. A, B и C, проведемъ окружность (что всегда можно сдѣлать). Тогда четвертая вершина D непремѣнно окажется на этой окружности, потому что въ противномъ случаѣ уголъ D лежалъ бы своею вершиною или внутри круга, или внѣ его, и тогда этотъ уголъ не измѣрялся бы половиною дуги ABC (**160** и **161**); поэтому сумма $B+D$ не измѣрялась бы полусуммою дугъ ADC и ABC, т.-е. сумма $B+D$ не равнялась бы $2d$, что противорѣчитъ условію.

171. Слѣдствія. 1°. *Изъ всѣхъ параллелограммовъ можно описать окружность только около прямоугольника.*

2°. *Около трапеціи можно описать окружность только тогда, когда она равнобочная.*

172. Теоремы. 1°. *Во всякомъ описанномъ четыреугольникѣ суммы противоположныхъ сторонъ равны.*

2°. Обратно: *въ четыреугольникъ можно вписать окружность, если въ немъ равны суммы противоположныхъ сторонъ.*



Черт. 130

1°. Пусть $ABCD$ будетъ описанный четыреугольникъ, т.-е. стороны его касаются окружности; требуется доказать, что $AB+CD=BC+AD$. Обозначимъ точки касанія черезъ M, N, P и Q. Такъ какъ двѣ касательныя, проведенныя изъ одной точки къ окружности, равны (127), то $AM=AQ$, $BM=BN$, $CN=CP$ и $DP=DQ$. Слѣд.

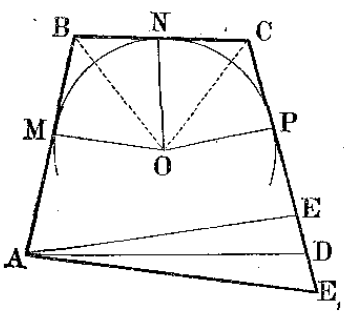
$$AM+MB+CP+PD=AQ+QD+BN+NC$$

т.-е. $AB+CD=AD+BC$.

2°. Пусть $ABCD$ будетъ такой четыреугольникъ (черт. 131), у котораго:

$$AB+CD=AD+BC.$$

Требуется доказать, что въ него можно вписать окружность. — Проведемъ биссектриссы BO и CO двухъ угловъ B и C. Эти прямыя должны пересѣчься, потому что сумма угловъ NBO и NCO меньше $2d$ (такъ какъ $B+C<4d$). Точка пересѣченія биссектриссъ должна быть одинаково удалена отъ сторонъ AB, BC и CD; поэтому, если эту точку возьмемъ за центръ, а за радіусъ одинъ изъ трехъ равныхъ перпендикуляровъ OM, ON, OP, опущенныхъ изъ O на стороны угловъ B и C, то окружность коснется сторонъ AB, BC и CD.



Черт. 131

Докажемъ, что она коснется и четвертой стороны AD. Для этого предположимъ, что касательная, проведенная къ нашей окружности изъ точки A, будетъ не AD, а какая-нибудь иная прямая, напр. AE. Тогда получится *описанный* четыреугольникъ $ABCE$, въ которомъ, по доказанному выше, будемъ имѣть:

$$BC+AE=AB+CE$$

Но по условію:

$$BC+AD=AB+CD$$

Вычтя почленно первое равенство изъ второго, найдемъ:

$$AD-AE=CD-CE=DE$$

т.-е. разность двухъ сторонъ $\triangle ADE$ равна третьей сторонѣ DE, что невозможно (50); значитъ, нельзя допустить, чтобы касательною къ нашей окружности была прямая AE, лежащая ближе къ центру O, чѣмъ AD. Такъ же можно доказать, что касательною не можетъ быть никакая прямая AE_1, лежащая дальше отъ центра, чѣмъ AD; значитъ, AD должна касаться окружности, т.-е. въ четыреугольникъ $ABCD$ можно вписать окружность.

173. Слѣдствіе. *Изъ всѣхъ параллелограммовъ окружность можно вписать только въ ромбъ и квадратъ.*

ГЛАВА IX.

Четыре замѣчательныя точки въ треугольникѣ.

174. Мы видѣли, что во всякомъ треугольникѣ:

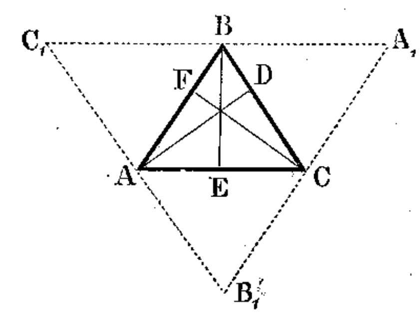
1°, перпендикуляры къ срединамъ сторонъ сходятся въ одной точкѣ, которая есть центръ описаннаго круга (110);

2°, биссектриссы угловъ сходятся въ одной точкѣ, которая есть центръ вписаннаго круга (168).

Слѣдующія двѣ теоремы указываютъ еще двѣ замѣчательныя точки треугольника: 3°, пересѣченіе высотъ и 4°, пересѣченіе медіанъ.

175. Теорема. *Три высоты треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ.*

Черезъ каждую вершину тр.-ка ABC (черт. 132) проведемъ прямую, параллельную противоположной сторонѣ его. Тогда получимъ вспомогательный $\triangle A_1B_1C_1$, къ сторонамъ котораго высоты даннаго тр.-ка перпендикулярны. Такъ какъ $C_1B=AC=BA_1$ (какъ противоположныя стороны параллелограмма), то точка B есть средина стороны A_1C_1. Подобно этому убѣдимся, что C есть средина A_1B_1 и A — средина B_1C_1. Такимъ образомъ, высоты AD, BE и CF служатъ перпендикулярами къ срединамъ сторонъ тр.-ка $A_1B_1C_1$; а такіе перпендикуляры, какъ извѣстно, пересѣкаются въ одной точкѣ.



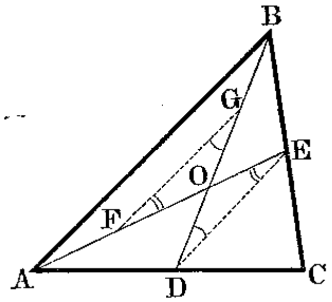
Черт. 132

Замѣчаніе. Точка, въ которой пересѣкаются высоты треугольника, наз. *ортоцентромъ*.

136. Теорема. *Три медіаны треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ; эта точка отсѣкаетъ отъ каждой медіаны третью часть, считая отъ соотвѣтствующей стороны.*

Возьмемъ въ тр.-кѣ ABC какія-нибудь двѣ медіаны, напр. AE и BD, пересѣкающіяся въ точкѣ O, и докажемъ, что

$$OD = {}^1\!/_3 BD \text{ и } OE = {}^1\!/_3 AE.$$



Черт. 133

Для этого, раздѣливъ OA и OB пополамъ въ точкахъ F и G, проведемъ FG и DE. Такъ какъ прямая FG соединяетъ средины двухъ сторонъ тр.-ка ABO, то (102) $FG \parallel AB$ и $FG = {}^1\!/_2 AB$. Прямая DE также соединяетъ средины двухъ сторонъ тр.-ка ABC; поэтому: $DE \parallel AB$ и $DE = {}^1\!/_2 AB$. Отсюда выводимъ, что $DE \parallel FG$ и $DE = FG$. Сравнивая теперь тр.-ки ODE и OFG, замѣчаемъ, что у нихъ $DE = FG$ и углы, прилежащіе къ этимъ сторонамъ, равны (какъ углы накрестъ лежащіе при параллельныхъ прямыхъ); слѣд., эти тр.-ки равны. Изъ равенства ихъ выводимъ: $OD = OG = BG$ и $OE = OF = AF$; поэтому $OD = {}^1\!/_3 BD$ и $OE = {}^1\!/_3 AE$.

Такъ какъ это доказательство можетъ быть повторено о любой парѣ медіанъ, то заключаемъ, что всѣ медіаны треугольника сходятся въ одной точкѣ, которая отъ каждой изъ нихъ отсѣкаетъ третью часть, считая отъ соотвѣтствующей стороны.

Замѣчаніе. Изъ физики извѣстно, что пересѣченіе медіанъ тр.-ка есть его *центръ тяжести*.

УПРАЖНЕНІЯ.

Доказать теоремы:

148. Если двѣ окружности касаются, то всякая сѣкущая, проведенная черезъ точку касанія, отсѣкаетъ отъ окружностей двѣ противолежащія дуги одинаковаго числа градусовъ.

149. Если черезъ точку касанія двухъ окружностей проведемъ двѣ сѣкущія и концы ихъ соединимъ хордами, то эти хорды параллельны.

150. Если черезъ точку касанія двухъ окружностей проведемъ какую-либо сѣкущую, то касательныя, проведенныя въ концахъ этой сѣкущей, параллельны.

151. Если основанія высотъ тр.-ка соединимъ прямыми, то получимъ новый тр.-къ, для котораго высоты перваго тр.-ка служатъ биссектриссами.

152. Если около тр.-ка опишемъ окружность и изъ произвольной точки ея опустимъ перпендикуляры на стороны тр.-ка, то ихъ основанія лежатъ на одной прямой (прямая *Симпсона*).

Задачи на построеніе.

153. На данной неопредѣленной прямой найти точку, изъ которой другая данная конечная прямая была бы видна подъ даннымъ угломъ.

154. Построимъ $\triangle$ по основанію, углу при вершинѣ и высотѣ.

155. Къ дугѣ даннаго сектора провести касательную, чтобы часть ея, заключенная между продолженными радіусами (ограничивающими секторъ), равнялась данной длинѣ (свести эту задачу на предыдущую).

156. Построить $\triangle$ по основанію, углу при вершинѣ и медіанѣ, проведенной къ основанію.

157. Даны по величинѣ и положенію двѣ конечныя прямыя a и b. Найти такую точку, изъ которой прямая a была бы видна подъ даннымъ угломъ α, а прямая b подъ даннымъ угломъ β.

158. Въ тр.-кѣ найти точку, изъ которой его стороны были бы видны подъ равными углами (*указаніе*: обратить вниманіе на то, что каждый изъ этихъ угловъ долженъ равняться ${}^4\!/_3 d$).

159. Построить $\triangle$ по углу при вершинѣ, высотѣ и медіанѣ, проведенной къ основанію (*указаніе:* продолживъ медіану на равное разстояніе и соединивъ полученную точку съ концами основанія, разсмотрѣть образовавшійся параллелограммъ).

160. Построить $\triangle$, въ которомъ даны: основаніе, прилежащій къ нему уголъ и уголъ, составленный медіаною, проведенною изъ вершины даннаго угла, со стороною, къ которой эта медіана проведена.

161. Построить параллелограммъ по двумъ его діагоналямъ и одному углу.

162. Построить $\triangle$ по основанію, углу при вершинѣ и суммѣ или разности двухъ другихъ сторонъ.

163. Построить четыреугольникъ по двумъ діагоналямъ, двумъ сосѣднимъ сторонамъ и углу, образованному остальными двумя сторонами.

164. Даны три точки A, B и C. Провести черезъ A такую прямую, чтобы разстояніе между перпендикулярами, опущенными на эту прямую изъ точекъ B и C, равнялось данной длинѣ.

165. Въ данный кругъ вписать $\triangle$, у котораго два угла даны.

166. Около даннаго круга описать $\triangle$, у котораго два угла даны.

167. Построить $\triangle$ по радіусу описаннаго круга, углу при вершинѣ и высотѣ.

168. Вписать въ данный кругъ $\triangle$, у котораго извѣстны: сумма двухъ сторонъ и уголъ, противолежащій одной изъ этихъ сторонъ.

169. Вписать въ данный кругъ четыреугольникъ, котораго сторона и два угла, не прилежащіе къ этой сторонѣ, даны.

170. Въ данный ромбъ вписать кругъ.

171. Въ равносторонній $\triangle$ вписать три круга, попарно касающіяся другъ друга и изъ которыхъ каждый касается двухъ сторонъ тр.-ка.

172. Построить четыреугольникъ, который можно было бы вписать въ окружность, по тремъ его сторонамъ и одной діагонали.

173. Построить ромбъ по даннымъ: сторонѣ и радіусу вписаннаго круга.

174. Около даннаго круга описать равнобедренный прямоугольный △.

175. Построить равнобедренный △ по основанію и радіусу вписаннаго круга.

176. Построить △ по основанію и двумъ медіанамъ, исходящимъ изъ концовъ основанія.

√177. То же — по тремъ медіанамъ.

178. Дана окружность и на ней три точки A, B и C. Вписать въ эту окружность такой △, чтобы его биссектриссы, при продолженіи, встрѣчали окружность въ точкахъ A, B и C.

179. Та же задача, съ замѣною биссектриссъ тр.-ка его высотами.

180. Дана окружность и на ней три точки M, N и P, въ которыхъ пересѣкаются съ окружностью (при продолженіи) высота, биссектрисса и медіана, исходящія изъ одной вершины вписаннаго тр.-ка. Построить этотъ △.

181. На окружности даны двѣ точки A и B. Изъ этихъ точекъ провести двѣ параллельныя хорды, которыхъ сумма дана.

Задачи на вычисленіе.

182. Вычислить вписанный уголъ, опирающійся на дугу, равную $^1/_{12}$ части окружности.

183. Кругъ раздѣленъ на два сегмента хордою, дѣлящею окружность на части въ отношеніи 5 : 7. Вычислить углы, которые вмѣщаются этими сегментами.

184. Двѣ хорды пересѣкаются подъ угломъ въ 36° 15′ 32″. Вычислить въ градусахъ, минутахъ и секундахъ двѣ дуги, заключенныя между сторонами этого угла и ихъ продолженіями, если одна изъ этихъ дугъ относится къ другой, какъ 3 : 2.

185. Уголъ, составленный двумя касательными, проведенными изъ одной точки къ окружности, равенъ 25° 15′. Вычислить дуги, заключенныя между точками касанія.

186. Вычислить уголъ, составленный касательною и хордою, если хорда дѣлитъ окружность на двѣ части, относящіяся какъ 3 : 7.

187. Двѣ окружности одинаковаго радіуса пересѣкаются подъ угломъ въ $^2/_3 d$; опредѣлить въ градусахъ меньшую изъ дугъ, заключающихся между точками пересѣченія.

Примѣчаніе. Угломъ двухъ пересѣкающихся дугъ наз. уголъ, составленный двумя касательными, проведенными къ этимъ дугамъ изъ точки пересѣченія.

188. Изъ одного конца діаметра проведена касательная, а изъ другого сѣкущая, которая съ касательною составляетъ уголъ въ 20° 30′. Какъ велика меньшая изъ дугъ, заключенныхъ между касательною и сѣкущею.

КНИГА III.

ПОДОБНЫЯ ФИГУРЫ.

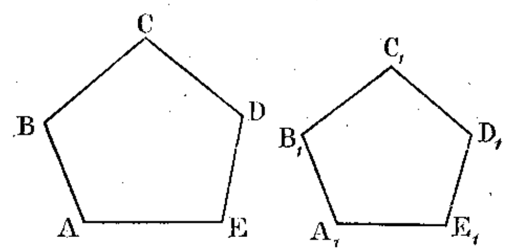
ГЛАВА I.

Подобіе треугольниковъ и многоугольниковъ.

177. Опредѣленія. Два многоугольника съ одинаковымъ числомъ сторонъ называются *подобными*, если углы одного равны соотвѣтственно угламъ другого и сходственныя стороны ихъ пропорціональны.

Сходственными называются тѣ стороны, которыя прилежатъ къ равнымъ угламъ. Выраженіе: „сходственныя стороны пропорціанальны“ означаетъ, что отношеніе какихъ-нибудь двухъ сходственныхъ сторонъ равно отношенію всякихъ другихъ сходственныхъ сторонъ.

Такимъ образомъ, многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ считаются подобными, если они удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ:



Черт. 134

1°, $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$, $D = D_1$, $E = E_1$

2°, $$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}$$

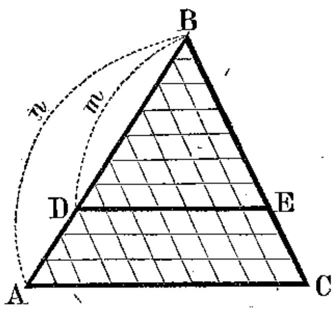
Этимъ условіямъ удовлетворяютъ, напр., всякіе два квадрата или всякіе два равносторонніе треугольника.

Замѣтимъ, что могутъ быть два многоугольника, у которыхъ углы соотвѣтственно равны, но стороны не пропорціанальны, и наоборотъ; напр., у квадрата и прямоугольника углы соотвѣтственно равны, а стороны не пропорціональны; у квадрата и ромба, наоборотъ, стороны пропорціональны, а углы не равны. Въ этомъ отношеніи треугольники рѣзко выдѣляются изъ многоугольниковъ: у нихъ, какъ увидимъ ниже, равенство угловъ влечетъ за собою пропорціональность сторонъ и обратно.

Изъ опредѣленія подобія слѣдуетъ, что если изъ двухъ *равныхъ* многоугольниковъ одинъ подобенъ третьему, то и другой подобенъ ему.

178. Лемма.*) *Прямая, проведенная внутри треугольника параллельно какой-нибудь его сторонѣ, отсѣкаетъ отъ него другой треугольникъ, подобный первому.*

Пусть въ тр.-кѣ ABC проведена прямая $DE \parallel AC$; требуется доказать, что $\triangle DBE$ подобенъ $\triangle ABC$. — Углы этихъ тр.-ковъ соотвѣтственно равны между собою (B общій уголъ, $D=A$ и $E=C$, какъ углы соотвѣтственные при параллельныхъ прямыхъ). Остается доказать, что сходственныя стороны пропорціональны. Разсмотримъ отдѣльно два случая.



Черт. 135

1°, *стороны AB и DB имѣютъ общую мѣру*. Раздѣлимъ AB на части, равныя этой общей мѣрѣ. Тогда BD раздѣлится на *цѣлое* число такихъ частей. Пусть этихъ частей содержится m въ BD и n въ AB. Проведемъ изъ точекъ дѣленія рядъ прямыхъ, параллельныхъ AC, и другой рядъ прямыхъ, параллельныхъ BC. Тогда BE и BC раздѣлятся на равныя части (**100**), которыхъ будетъ m въ BE и n въ BC. Точно также DE раздѣлится на m равныхъ частей, а AC на n равныхъ частей, причемъ части DE равны частямъ AC (какъ противоположныя стороны параллелограммовъ). Теперь очевидно, что

$$\frac{BD}{BA}=\frac{m}{n};\quad \frac{BE}{BC}=\frac{m}{n};\quad \frac{DE}{AC}=\frac{m}{n}$$

Слѣд.: $$\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}$$

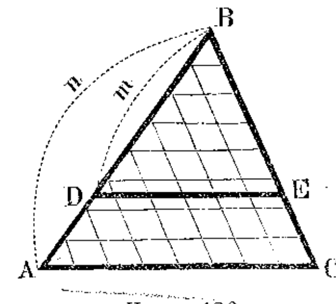
Такимъ образомъ у тр.-ковъ BDE и ABC углы соотвѣтственно

*) *Леммою* наз. вспомогательная теорема, излагаемая только для того, чтобы при ея помощи доказать послѣдующія теоремы.

равны и сходственныя стороны пропорціональны; значитъ, они подобны.

2°, *стороны AB и BD не имѣютъ общей мѣры*. Найдемъ приближенное значеніе каждаго изъ отношеній:

$$\frac{DB}{AB},\ \frac{BE}{BC} \text{ и } \frac{DE}{AC}$$



Черт. 136

съ произвольною точностью до $1/n$. Для этого раздѣлимъ AB на n равныхъ частей и черезъ точки дѣленія проведемъ рядъ прямыхъ, параллельныхъ AC, и другой рядъ прямыхъ, параллельныхъ BC. Тогда каждая изъ сторонъ BC и AC раздѣлится также на n равныхъ частей (**100**). Предположимъ теперь, что $1/n$ доля AB содержится въ BD болѣе m разъ, но менѣе $m+1$ разъ; тогда, какъ видно изъ чертежа, $1/n$ доля BC содержится въ BE также болѣе m, но менѣе $m+1$ разъ, и $1/n$ доля AC содержится въ DE болѣе m, но менѣе $m+1$ разъ. Слѣд.:

$$\text{прибл. отн. } \frac{BD}{BA}=\frac{m}{n};\quad \text{прибл. отн. } \frac{BE}{BC}=\frac{m}{n};\quad \text{прибл. отн. } \frac{DE}{AC}=\frac{m}{n}$$

Такимъ образомъ, приближенныя отношенія, вычисленныя съ произвольною, но одинаковою точностью, равны другъ другу; а въ этомъ и состоитъ равенство несоизмѣримыхъ отношеній.

179. Теорема. *Два треугольника подобны, если:*

1°, *два угла одного соотвѣтственно равны двумъ угламъ другого;*

или 2°, *двѣ стороны одного пропорціональны двумъ сторонамъ другого, и углы, лежащіе между этими сторонами, равны;*

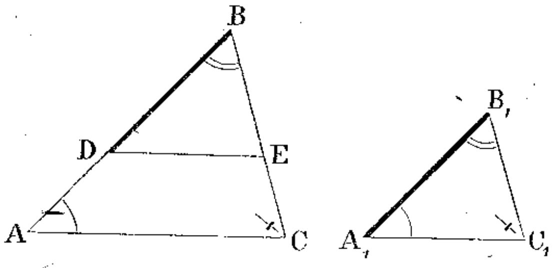
или 3°, *три стороны одного пропорціанальны тремъ сторонамъ другого.*

1°. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ будутъ два тр.-ка, у которыхъ:

$$A=A_1,\ B=B_1 \text{ и, слѣд.; } C=C_1 \text{ (черт. 137).}$$

Требуется доказать, что такіе тр.-ки подобны. — Отложимъ на AB часть BD, равную A_1B_1, и проведемъ $DE \parallel AC$.

Тогда получимъ вспомогательный тр.-къ DBE, который согласно предыдущей леммѣ, подобенъ тр.-ку ABC. Съ другой стороны $\triangle DBE = \triangle A_1B_1C_1$, потому что у нихъ: $BD = A_1B_1$ (по построенію), $B = B_1$ (по условію) и $D = A_1$ (потому что $D = A$ и $A = A_1$).



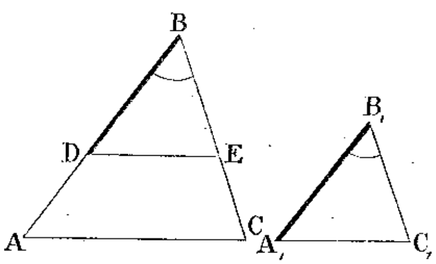
Черт. 137

Но если изъ двухъ равныхъ тр.-ковъ одинъ подобенъ третьему, то и другой ему подобенъ; слѣд., $\triangle A_1B_1C_1$ подобенъ $\triangle ABC$.

2°. Пусть въ тр.-кахъ ABC и $A_1B_1C_1$ дано (черт. 138):

$$B = B_1 \ \text{ и } \ \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \qquad [1]$$

Требуется доказать, что такіе тр.-ки подобны. — Отложимъ снова часть BD, равную A_1B_1, и проведемъ $DE \parallel AC$. Тогда получимъ вспомогательный $\triangle BDE$, подобный $\triangle ABC$. Докажемъ, что онъ равенъ $\triangle A_1B_1C_1$. Изъ подобія тр.-ковъ DBE и ABC слѣдуетъ (черт. 138):



Черт. 138

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE} \qquad (2)$$

Сравнивая этотъ рядъ равныхъ отношеній съ даннымъ рядомъ (1), замѣчаемъ, что первыя отношенія обоихъ рядовъ одинаковы ($DB = A_1B_1$ по построенію); слѣдовательно, остальныя отношенія этихъ рядовъ также равны, т.-е.

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BC}{BE}; \ \text{ откуда } \ B_1C_1 = BE$$

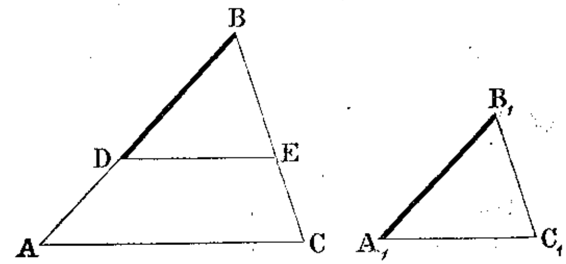
Теперь видимъ, что тр.-ки DBE и $A_1B_1C_1$ имѣютъ по равному углу ($B = B_1$), заключенному между равными сторонами; значитъ, эти тр.-ки равны. Но $\triangle DBE$ подобенъ и $\triangle A_1B_1C_1$ подобенъ $\triangle ABC$.

3°. Пусть въ тр.-кахъ ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 139) дано:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \qquad [1]$$

Требуется доказать, что такіе тр.-ки подобны. — Сдѣлавъ построеніе такое же, какъ и прежде, докажемъ, что $\triangle DBE = \triangle A_1B_1C_1$. Изъ подобія тр.-ковъ DBE и ABC слѣдуетъ:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE} \qquad [2]$$



Черт. 139

Сравнивая этотъ рядъ съ даннымъ рядомъ [1], замѣчаемъ, что первыя отношенія у нихъ равны; слѣд., и остальныя отношенія равны, т.-е.

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BC}{BE}; \ \text{ откуда: } \ B_1C_1 = BE$$

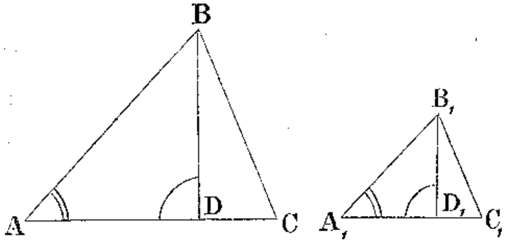
$$\text{и } \ \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AC}{DE}; \ \text{ откуда: } \ A_1C_1 = DE$$

Теперь видимъ, что тр.-ки DBE и $A_1B_1C_1$ имѣютъ по три соотвѣтственно равныя стороны; значитъ, они равны. Но одинъ изъ нихъ, именно DBE, подобенъ $\triangle ABC$; слѣд., и другой, т.-е. $A_1B_1C_1$, подобенъ ABC.

180. Замѣчаніе. Полезно обратить вниманіе на то, что пріемъ доказательства, употребленный нами въ трехъ случаяхъ предыдущей теоремы, одинъ и тотъ же; а именно: отложивъ на сторонѣ бо́льшаго треугольника часть, равную сходственной сторонѣ меньшаго, и проведя прямую, параллельную другой сторонѣ, мы образуемъ вспомогательный тр.-къ, подобный бо́льшему данному. Послѣ этого, беря во вниманіе условія разсматриваемаго случая и свойства подобныхъ тр.-ковъ, мы доказываемъ равенство вспомогательнаго тр.-ка меньшему данному и, наконецъ, заключаемъ о подобіи данныхъ тр.-ковъ.

181. Слѣдствіе. *Въ подобныхъ треугольникахъ сходственныя стороны пропорціанальны сходственнымъ высо-*

тамъ, т.-е. тѣмъ, которыя опущены на сходственныя стороны.



Черт. 140

Дѣйствительно, если тр.-ки ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, то прямоугольные тр.-ки ABD и $A_1B_1D_1$ также подобны ($A=A_1$ и $D=D_1$); поэтому

$$\frac{BD}{B_1D_1}=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$$

Подобно этому можно доказать, что въ подобныхъ тр.-кахъ *сходственныя стороны пропорціанальны сходственнымъ медіанамъ, сходственнымъ биссектриссамъ, радіусамъ круговъ вписанныхъ и радіусамъ круговъ описанныхъ.*

182. Теорема. *Если стороны одного треугольника соотвѣтственно параллельны или перпендикулярны сторонамъ другого треугольника, то такіе треугольники подобны.*

Такъ какъ на чертежѣ затруднительно изобразить всевозможные случаи расположенія указанныхъ въ теоремѣ треугольниковъ, то мы будемъ вести разсужденіе независимо отъ чертежа.

Пусть стороны угловъ A, B и C одного треугольника соотвѣтственно параллельны или перпендикулярны сторонамъ угловъ A_1, B_1, C_1 другого треугольника. Тогда углы A и A_1 или равны другъ другу, или составляютъ въ суммѣ два прямыхъ (**81** и **82**); то же самое можно сказать объ углахъ B и B_1, C и C_1. Чтобы доказать подобіе данныхъ тр.-ковъ, достаточно убѣдиться, что какіе-нибудь два угла одного изъ нихъ равны соотвѣтственно двумъ угламъ другого. Предположимъ, что этого нѣтъ. Тогда могутъ представиться два случая:

1°, *У треугольниковъ нѣтъ вовсе попарно равныхъ угловъ.* Тогда:

$$A+A_1=2d;\ \ B+B_1=2d;\ \ C+C_1=2d$$

и, слѣд., сумма угловъ обоихъ треугольниковъ равна $6d$. Такъ какъ это невозможно, то этотъ случай исключается.

2°, *У треугольниковъ только одна пара равныхъ угловъ;* напр., пусть $A=A_1$. Тогда

$$B+B_1=2d;\ \ C+C_1=2d$$

и, слѣд., сумма угловъ обоихъ тр.-ковъ больше $4d$. Такъ какъ это невозможно, то и этотъ случай исключается.

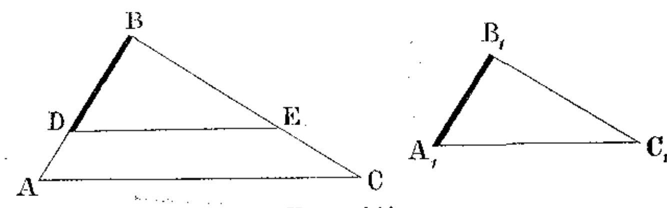
Остается одно возможное допущеніе, что тр.-ки имѣютъ двѣ пары равныхъ угловъ; но тогда они подобны.

183. Теорема. *Прямоугольные треугольники подобны, если гипотенуза и катетъ одного пропорціанальны гипотенузѣ и катету другого.*

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ два тр.-ка (черт. 141), у которыхъ углы B и B_1 прямые и

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1} \qquad [1]$$

Требуется доказать, что такіе тр.-ки подобны.—Для доказательства употребимъ тотъ же пріемъ, которымъ мы пользовались выше (**180**). Отложимъ $BD=A_1B_1$ и проведемъ



Черт. 141

$DE \parallel AC$. Тогда получимъ вспомогательный $\triangle DBE$, подобный $\triangle ABC$ (**178**). Докажемъ, что онъ равенъ $\triangle A_1B_1C_1$. Изъ подобія тр.-ковъ ABC и DBE слѣдуетъ:

$$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{DE} \qquad [2]$$

Сравнивая эту пропорцію съ данной [1], находимъ, что первыя отношенія ихъ одинаковы; слѣд., равны и вторыя отношенія, т.-е.

$$\frac{AC}{DE}=\frac{AC}{A_1C_1};\ \text{откуда: } DE=A_1C_1$$

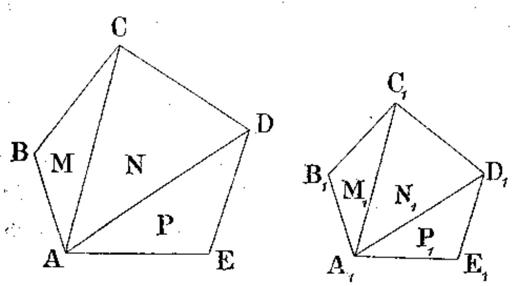
Теперь видимъ, что тр.-ки DBE и $A_1B_1C_1$ имѣютъ по равной гипотенузѣ и равному катету; слѣд., они равны; а такъ какъ одинъ изъ нихъ подобенъ $\triangle ABC$, то и другой ему подобенъ.

184. Задача. *На данной сторонѣ построить треугольникъ, подобный данному треугольнику.*

При концахъ данной стороны строимъ углы, соотвѣтственно равные угламъ даннаго тр.-ка и одинаково съ ними расположенные. Полученный тр.-къ будетъ подобенъ данному (**179**, 1°).

185. Теорема. *Два многоугольника подобны, если они состоятъ изъ одинаковаго числа подобныхъ и одинаково расположенныхъ треугольниковъ.*

Пусть мн.-ки $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ составлены изъ одинаковаго числа попарно подобныхъ тр.-ковъ: $\triangle M$ подобенъ $\triangle M_1$, $\triangle N$ подобенъ $\triangle N_1$ и т. д.; пусть кромѣ того эти тр.-ки одинаково расположены; требуется доказать, что такіе многоугольники подобны, т.-е. что у нихъ: 1°, равны попарно углы и 2°, сходственныя стороны пропорціанальны (**177**).



Черт. 142

1°. Равенство угловъ мн.-ковъ слѣдуетъ изъ равенства угловъ тр.-ковъ; такъ, $B=B_1$ и $E=E_1$, какъ равные углы подобныхъ тр.-ковъ (M и M_1, P и P_1), $A=A_1$, $C=C_1$, $D=D_1$, какъ суммы угловъ, соотвѣтственно равныхъ другъ другу.

2°. Изъ подобія тр.-ковъ слѣдуетъ:

$$\overbrace{\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}}^{\text{Изъ подобія } M \text{ и } M_1}=\underbrace{\frac{CD}{C_1D_1}}_{\text{Изъ подобія } N \text{ и } N_1}=\overbrace{\frac{AD}{A_1D_1}=\frac{ED}{E_1D_1}=\frac{AE}{A_1E_1}}^{\text{Изъ подобія } P \text{ и } P_1}$$

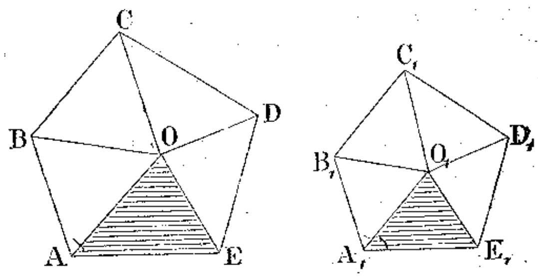
Возьмемъ изъ этого ряда равныхъ отношеній только тѣ, въ которыя входятъ стороны данныхъ многоугольниковъ; тогда получимъ:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EA}{E_1A_1}$$

Такимъ образомъ, данные многоугольники, имѣя соотвѣтственно равные углы и пропорціанальныя стороны, подобны.

186. Обратная теорема. *Подобные многоугольники можно разложить на одинаковое число подобныхъ и одинаково расположенныхъ треугольниковъ.*

Пусть мн.-ки $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ подобны. Ихъ можно разложить на одинаковое число подобныхъ тр.-ковъ различными способами. Укажемъ самый общій способъ.— Возьмемъ внутри мн. $ABCDE$ произвольную точку O и соединимъ ее со всѣми вершинами. Тогда мн. $ABCDE$ разобьется на столько треугольниковъ, сколько въ немъ сторонъ. Возьмемъ одинъ изъ нихъ, напр. AOE, и на сходственной сторонѣ A_1E_1 другого многоугольника построимъ $\triangle A_1O_1E_1$, подобный $\triangle AOE$. Вершину его O_1 соединимъ съ прочими вершинами мн. $A_1B_1C_1D_1E_1$. Тогда и этотъ мног.-къ разобьется на то же число тр.-ковъ. Докажемъ, что тр.-ки перваго многоугольника соотвѣтственно подобны тр.-камъ второго многоугольника. $\triangle AOE$ подобенъ $\triangle A_1O_1E_1$ по построенію. Чтобы доказать подобіе сосѣднихъ тр.-ковъ ABO и $A_1B_1O_1$, примемъ во вниманіе, что изъ подобія мн.-ковъ, между прочимъ слѣдуетъ:



Черт. 143

$$A=A_1 \quad \text{и} \quad \frac{BA}{B_1A_1}=\frac{AE}{A_1E_1} \qquad [1]$$

а изъ подобія тр.-ковъ AOE и $A_1O_1E_1$ выводимъ:

$$\angle OAE=\angle O_1A_1E_1 \quad \text{и} \quad \frac{AO}{A_1O_1}=\frac{AE}{A_1E_1} \qquad [2]$$

Изъ равенствъ [1] и [2] слѣдуетъ:

$$\angle BAO=\angle B_1A_1O_1 \quad \text{и} \quad \frac{BA}{B_1A_1}=\frac{AO}{A_1O_1}$$

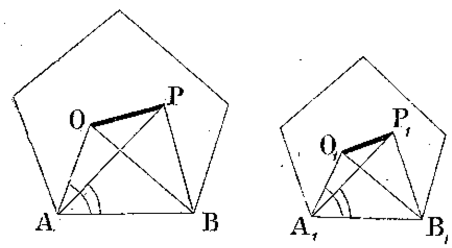
Теперь видимъ, что тр.-ки ABO и $A_1B_1O_1$ имѣютъ по равному углу, заключенному между пропорціанальными сторонами; значитъ, они подобны.

Совершенно такъ же докажемъ подобіе слѣдующихъ треугольниковъ BCO и $B_1C_1O_1$, затѣмъ COD и $C_1O_1D_1$ и т. д.

187. Сходственныя точки и линіи. Если на плоскостяхъ подобныхъ многоугольниковъ возьмемъ такія точки O и O_1 (черт. 143), что тр.-ки OAB и $O_1A_1B_1$, полученные отъ соединенія этихъ точекъ съ концами какихъ-нибудь двухъ сходственныхъ сторонъ, подобны, то такія точки наз. *сходственными*. Изъ предыдущей теоремы слѣдуетъ, что если точки O и O_1 сходственныя, то *всѣ треугольники*, получаемые соединеніемъ этихъ точекъ съ концами какихъ угодно сходственныхъ сторонъ, будутъ соотвѣтственно подобны.

Сходственныя точки могутъ быть взяты и на сторонахъ многоугольниковъ, и въ ихъ сходственныхъ вершинахъ, и даже внѣ многоугольниковъ.

Если точки O и O_1, P и P_1 (черт. 144) попарно сходственныя, то прямыя OP и O_1P_1 наз. *сходственными линіями*. Эти линіи обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ.



Черт. 144

188. Теорема. *Сходственныя линіи двухъ подобныхъ многоугольниковъ пропорціанальны ихъ сходственнымъ сторонамъ.*

Соединимъ сходственныя точки съ концами двухъ какихъ-нибудь сходств. сторонъ, напр. AB и A_1B_1. Изъ подобія треугольниковъ AOB и $A_1O_1B_1$ слѣдуетъ:

$$\angle OAB = \angle O_1A_1B_1 \quad \text{и} \quad \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \qquad [1]$$

а изъ подобія тр.-ковъ PAB и $P_1A_1B_1$ выводимъ:

$$\angle PAB = \angle P_1A_1B_1 \quad \text{и} \quad \frac{PA}{P_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \qquad [2]$$

Изъ сравненія равенствъ [1] и [2] находимъ:

$$\angle OAP = \angle O_1A_1P_1 \quad \text{и} \quad \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{PA}{P_1A_1}$$

Теперь видимъ, что тр.-ки OAP и $O_1A_1P_1$ имѣютъ по равному углу, заключенному между пропорціанальными сторонами; слѣд., они подобны и потому

$$\frac{OP}{O_1P_1} = \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$$

189. Теорема. *Периметры подобныхъ многоугольниковъ относятся, какъ сходственныя стороны.*

Пусть мн.-ки $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (черт. 143) подобны; тогда, по опредѣленію:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}$$

Изъ алгебры извѣстно, что если имѣемъ рядъ равныхъ отношеній, то сумма предыдущихъ относится къ суммѣ послѣдующихъ, какъ какой-нибудь изъ предыдущихъ къ своему послѣдующему; поэтому:

$$\frac{AB + BC + CD + DE + EA}{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 + E_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \cdots$$

Примѣръ. Если сторона одного многоугольника болѣе сходственной стороны другого многоугольника, подобнаго ему, въ 2 раза, 3 раза, 4 раза и т. д., то и периметръ перваго многоугольника болѣе периметра второго въ 2 раза, 3 раза, 4 раза и т. д.

190. Задача. *На данной сторонѣ* A_1E_1, (черт. 142) *построить многоугольникъ, подобный данному многоугольнику* $ABCDE$.

Разбивъ данный многоугольникъ на тр.-ки (M, N, P), строятъ на данной сторонѣ A_1E_1 тр.-къ P_1, подобный тр.-ку P, затѣмъ на сторонѣ A_1D_1 тр.-къ N_1, подобный тр.-ку N, и т. д. Полученный такимъ образомъ мног.-къ $A_1B_1C_1D_1E_1$ будетъ подобенъ данному (**185**).

ГЛАВА II.

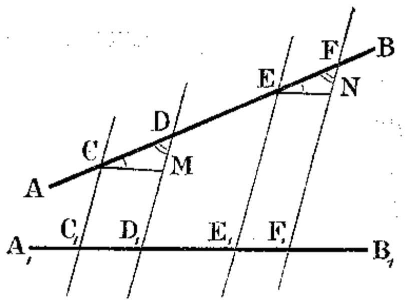
Нѣкоторыя теоремы о пропорціанальныхъ линіяхъ.

191. Теорема. *Двѣ прямыя, пересѣкаемыя рядомъ параллельныхъ прямыхъ, разсѣкаются ими на пропорціанальныя части.*

Пусть AB и A_1B_1 (черт. 145) будутъ двѣ какія-нибудь прямыя, разсѣкаемыя рядомъ параллельныхъ прямыхъ CC_1, DD_1, EE_1,

FF_1 и т. д.; требуется доказать, что отношеніе двухъ какихъ-нибудь отрѣзковъ прямой AB равно отношенію соотвѣтствующихъ отрѣзковъ прямой A_1B_1. Докажемъ, напр., что:

$$\frac{CD}{EF}=\frac{C_1D_1}{E_1F_1}$$



Черт. 145

Проведя CM и EN параллельно A_1B_1, будемъ имѣть: $C_1D_1=CM$ и $E_1F_1=EN$ (**91**). Тр.-ки CDM и EFN подобны, потому что углы одного равны соотвѣтственно угламъ другого (вслѣдствіе параллельности линій). Изъ ихъ подобія слѣдуетъ:

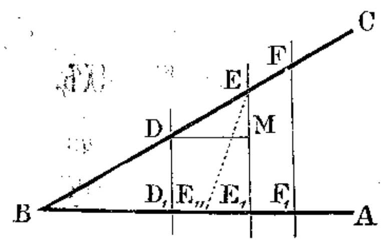
$$\frac{CD}{EF}=\frac{CM}{EN}; \text{ откуда: } \frac{CD}{EF}=\frac{C_1D_1}{E_1F_1}$$

Подобнымъ образомъ легко доказать пропорціанальность всякихъ другихъ соотвѣтствующихъ отрѣзковъ.

192. Теорема. *Стороны угла, пересѣкаемыя рядомъ параллельныхъ прямыхъ, разсѣкаются ими на пропорціанальныя части.*

Пусть стороны угла ABC пересѣкаются рядомъ параллельныхъ прямыхъ DD_1, EE_1, FF_1 и т. д.; требуется доказать, что отношеніе двухъ какихъ-нибудь отрѣзковъ стороны BC равно отношенію соотвѣтствующихъ отрѣзковъ стороны BA. Докажемъ, напр., что:

$$\frac{BD}{DE}=\frac{BD_1}{D_1E_1}$$



Черт. 146

Проведя $DM \parallel BA$, будемъ имѣть: $D_1E_1=DM$. Изъ подобія тр.-ковъ BDD_1 и DEM находимъ:

$$\frac{BD}{DE}=\frac{BD_1}{DM}; \text{ откуда: } \frac{BD}{DE}=\frac{BD_1}{D_1E_1}$$

Подобнымъ образомъ легко доказать пропорціанальность всякихъ другихъ соотвѣтствующихъ отрѣзковъ.

193. Обратная теорема. *Если на сторонахъ угла отложимъ отъ вершины пропорціанальныя части, то прямыя, соединяющія соотвѣтственные концы ихъ, параллельны.*

Пусть на сторонахъ угла ABC (черт. 146) отложены отъ вершины части BD, DE, BD_1 и D_1E_1, удовлетворяющія пропорціи:

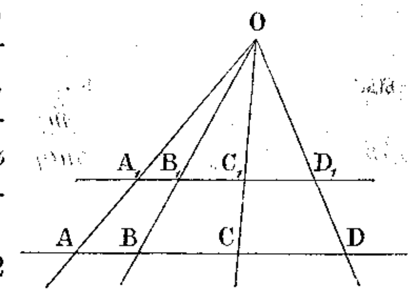
$$BD:DE=BD_1:D_1E_1$$

Требуется доказать, что прямыя DD_1 и EE_1 параллельны.—Предположимъ, что прямая, параллельная DD_1 и проходящая черезъ точку E, будетъ не EE_1, а какая-нибудь иная, напр. EE_{11}. Тогда, согласно прямой теоремѣ, будемъ имѣть:

$$\frac{BD}{DE}=\frac{BD_1}{D_1E_{11}} \text{ и по условію: } \frac{BD}{DE}=\frac{BD_1}{D_1E_1}$$

Откуда: $D_1E_{11}=D_1E_1$, что невозможно.

194. Теорема. *Прямыя* (OA, OB, OC.... черт. 147), *исходящія изъ одной точки* (O), *и пересѣкаемыя рядомъ параллельныхъ прямыхъ* ($AD, A_1D_1 \ldots.$), *разсѣкаются ими на пропорціанальныя части и сами дѣлятъ эти параллельныя на пропорціанальныя части.*



Черт. 147

1°. Примѣняя теорему § 192 сначала къ углу AOB, затѣмъ къ углу BOC и т. д., получимъ:

$$\underbrace{\overbrace{\frac{OA_1}{A_1A}=\frac{OB_1}{B_1B}}^{\text{для угла } AOB}=\frac{OC_1}{C_1C}}_{\text{для угла } BOC}\overbrace{=\frac{OD_1}{D_1D}}^{\text{для угла } COD}=\ldots$$

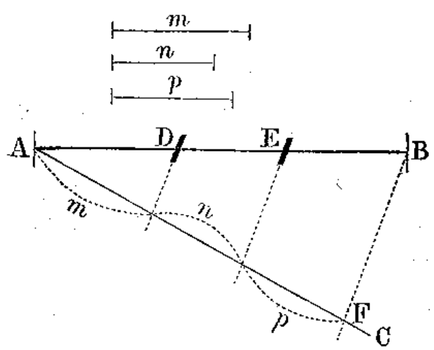
2°. Изъ подобія тр.-ковъ AOB и A_1OB_1, затѣмъ BOC и B_1OC_1, выводимъ:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BO}{B_1O} \text{ и } \frac{BO}{B_1O}=\frac{BC}{B_1C_1}$$

Откуда:
$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$$

Подобнымъ же образомъ доказывается пропорція $BC:B_1C_1=$ $=CD:C_1D_1$.

195. Задача. *Раздѣлить конечную прямую AB на части пропорціанально конечнымъ прямымъ $m:n:p$.*

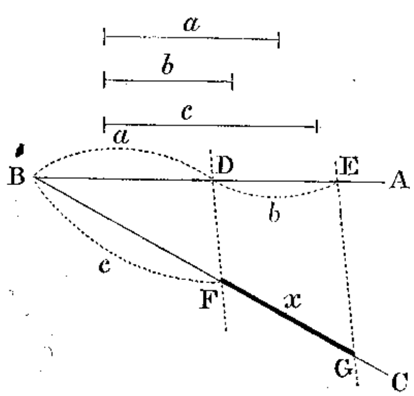


Черт. 148

Проведя неопредѣленную прямую AC подъ произвольнымъ угломъ къ AB, отложимъ на ней части, равныя m, n и p. Точку F, составляющую конецъ p, соединяемъ съ B и черезъ точки отложенія проводимъ прямыя, параллельныя BF. Тогда AB раздѣлится въ точкахъ D и E на части, пропорціанальныя $m:n:p$ (**192**).

Если m, n и p означаютъ какія-нибудь числа, напр. $2, 5, 3$, то построеніе выполняется такъ же, съ тою разницей, что на AC откладываются части, равныя 2, 5 и 3 произвольнымъ единицамъ длины.

196. Задача. *Къ тремъ конечнымъ прямымъ a, b и c найти четвертую пропорціанальную,*



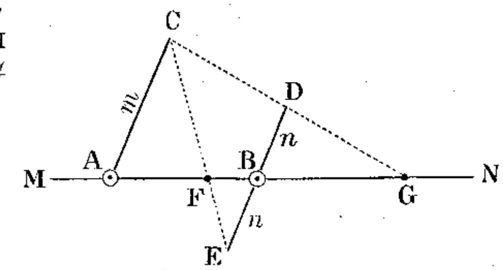
Черт. 149

т.-е. найти такую прямую x, которая удовлетворяла бы пропорціи $a:b=c:x$.—На сторонахъ произвольнаго угла ABC откладываемъ части: $BD=a$, $DE=b$, $BF=c$. Соединивъ затѣмъ D и F, проводимъ $EG \parallel DF$. Отрѣзокъ FG будетъ искомый (**192**).

197. Задача. *На неопредѣленной прямой MN найти точки, которыхъ разстоянія отъ двухъ данныхъ точекъ A и B этой прямой относились бы, какъ $m:n$.*—Черезъ A и B проводимъ двѣ произвольныя параллельныя прямыя и на нихъ откладываемъ: $AC=m$, $BD=n$ и $BE=n$. Проведя затѣмъ CD и CE, получимъ

двѣ искомыя точки: F и G. Дѣйствительно, изъ подобія треугольниковъ ACF и FBE, а затѣмъ изъ подобія тр.-ковъ ACG и BDG находимъ:

$$FA:FB=AC:BE=$$
$$=m:n$$
$$GA:GB=AC:BD=$$
$$=m:n$$



Черт. 150

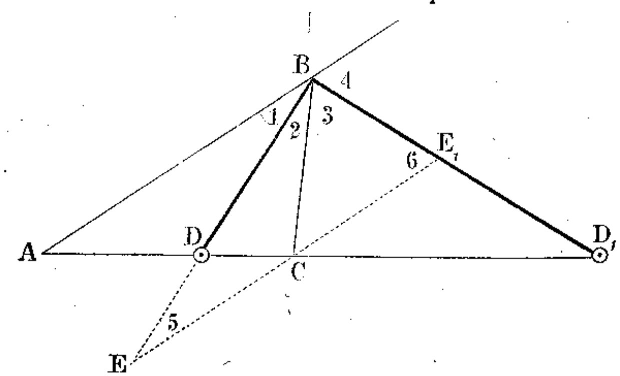
Замѣчаніе. Болѣе двухъ точекъ, удовлетворяющихъ требованію задачи, не можетъ быть, потому что при измѣненіи положенія точки F между A и B отношеніе $FA:FB$ *измѣняется;* то же самое можно сказать объ отношеніи $GA:GB$.

Когда $m=n$, существуетъ только одна точка (лежащая на срединѣ между A и B), которая удовлетворяетъ требованію задачи.

198. Теорема. *Биссектрисса внутренняго или внѣшняго угла треугольника пересѣкаетъ противоположную сторону или ея продолженіе въ такой точкѣ, которой разстоянія отъ концовъ этой стороны пропорціанальны двумъ другимъ сторонамъ треугольника.*

Пусть BD есть биссектрисса внутренняго, а BD_1—биссектрисса внѣшняго угла тр.-ка ABC. Требуется доказать, что

$$1^{\circ}.\ \frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC} \qquad 2^{\circ}.\ \frac{D_1A}{D_1C}=\frac{BA}{BC}$$



Черт. 151

Черезъ вершину C проведемъ $EE_1 \parallel AB$ до пересѣченія съ обѣими биссектриссами. Тр.-ки ABD и DEC подобны (углы при D равны, какъ вертикальные, уг. $1=$ уг. 5, какъ углы накрестъ лежащіе при параллельныхъ); точно также подобны тр.-ки ABD_1 и CE_1D_1. Изъ подобія ихъ находимъ:

$$\frac{DA}{DC}=\frac{AB}{EC} \quad [1] \qquad \frac{D_1A}{D_1C}=\frac{AB}{CE_1} \quad [2]$$

Чтобы перейти отъ этихъ пропорцій къ тѣмъ, которыя требуется доказать, достаточно убѣдиться, что $EC=BC$ и $CE_1=BC$. И дѣйствительно, такъ какъ уг. $2=$ уг. 1 (по условію) и уг. $5=$ уг. 1 (какъ накр. леж.), то уг. $2=$ уг. 5, и потому $\triangle EBC$ равнобедренный, т.-е. $EC=BC$; съ другой стороны уг. $3=$ уг. 4 (по условію) и уг. $6=$ уг. 4 (какъ накр. леж.); значитъ, уг. $3=$ уг. 6, и потому $\triangle BCE_1$ равнобедренный, т.-е. $CE_1=BC$. Замѣнивъ теперь въ пропорціяхъ [1] и [2] отрѣзки EC и CE_1 на BC, получимъ тѣ пропорціи, которыя требовалось доказать.

Численный примѣръ. Пусть $AB=10$, $BC=7$ и $AC=6$. Тогда биссектриссы BD и BD_1 опредѣлятъ точки D и D_1, которыхъ разстоянія отъ A и C можно найти изъ пропорцій:

$$\frac{DA}{DC}=\frac{10}{7} \quad \text{и} \quad \frac{D_1A}{D_1C}=\frac{10}{7}$$

откуда: $$\frac{DA+DC}{DA}=\frac{17}{10} \quad \text{и} \quad \frac{D_1A-D_1C}{D_1A}=\frac{3}{10}$$

т.-е. $$\frac{6}{DA}=\frac{17}{10} \quad \text{и} \quad \frac{6}{D_1A}=\frac{3}{10}$$

значитъ: $$DA=\frac{60}{17}=3\frac{9}{17} \quad \text{и} \quad D_1A=\frac{60}{3}=20$$

199. Обратная теорема. *Если прямая, исходящая изъ вершины треугольника, пересѣкаетъ противоположную сторону или ея продолженіе въ такой точкѣ, которой разстоянія до концовъ этой стороны пропорціанальны двумъ другимъ сторонамъ, то она есть биссектрисса внутренняго или внѣшняго угла треугольника.*

Пусть D и D_1 (черт. 151) будутъ двѣ точки, удовлетворяющія пропорціямъ:

$$\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC} \quad [1] \qquad \frac{D_1A}{D_1C}=\frac{BA}{BC} \quad [2]$$

Требуется доказать, что прямыя BD и BD_1 дѣлятъ пополамъ: первая внутренній, а вторая внѣшній уголъ тр.-ка ABC. — Проведя снова прямую $EE_1 \parallel AB$, найдемъ изъ подобія треугольниковъ:

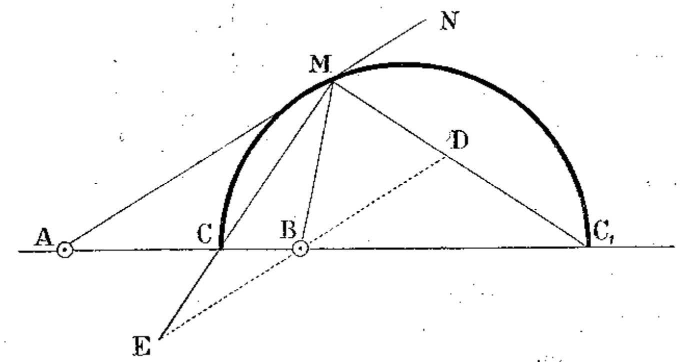
$$\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{EC} \quad [3] \qquad \frac{D_1A}{D_1C}=\frac{BA}{CE_1} \quad [4]$$

Сравнивая пропорціи [3] съ [1] и [4] съ [2], находимъ:

$$EC=BC \quad \text{и} \quad CE_1=BC$$

Поэтому въ тр.-кѣ BEC равны углы 2 и 5, а въ треугольникѣ BE_1C равны углы 3 и 6; но уг. $5=$ уг. 1 (какъ накр. леж.) и уг. $6=$ уг. 4 (по той же причинѣ); слѣд. уг. $2=$ уг. 1 и уг. $3=$ уг. 4, т.-е. BD и BD_1 суть биссектриссы.

200. Теорема. *Геометрическое мѣсто точекъ, которыхъ разстоянія отъ двухъ данныхъ точекъ A и B находятся въ постоянномъ отношеніи $m:n$, есть окружность, когда m не равно n.*



Черт. 152

Если m не равно n, то на неопредѣленной прямой, проходящей черезъ A и B, можно найти двѣ точки, принадлежащія искомому геометр. мѣсту (197). Пусть это будутъ точки C и C_1, т.-е.

$$CA:CB=m:n \text{ и } C_1A:C_1B=m:n$$

Предположимъ теперь, что существуетъ еще какая-нибудь точка M, удовлетворяющая пропорціи:

$$MA:MB=m:n$$

Проведя MC и MC_1, мы должны заключить (199), что первая изъ этихъ прямыхъ есть биссектрисса угла AMB, а вторая—биссектрисса угла BMN; вслѣдствіе этого уголъ CMC_1, составленный изъ двухъ *половинъ* смежныхъ угловъ, долженъ быть прямой, а потому вершина его M лежитъ, на окружности, описанной на CC_1, какъ на діаметрѣ. Такимъ образомъ мы доказали, что всякая точка M, принадлежащая искомому геометр. мѣсту, лежитъ на окружности CC_1. Теперь докажемъ обратное предложеніе, т.-е., что всякая точка этой окружности принадлежитъ геометр. мѣсту.

Пусть M есть произвольная точка этой окружности. Требуется доказать, что $MA : MB = m : n$. Проведя черезъ B прямую $DE \parallel AM$, будемъ имѣть слѣдующія пропорціи:

$$MA : BD = C_1A : C_1B = m : n \quad [1]$$
$$MA : BE = CA : CB = m : n \quad [2]$$

Откуда

$$BD = BE$$

т.-е. точка B есть средина прямой DE. Такъ какъ уголъ CMC_1 вписанный и опирается на діаметръ, то онъ прямой; поэтому $\triangle\ DME$ прямоугольный. Вслѣдствіе этого, если средину B гипотенузы DE примемъ за центръ и опишемъ окружность, то она пройдетъ черезъ M; значитъ, $BD = MB$. Подставивъ теперь въ пропорцію [1] на мѣсто BD равную ей прямую MB, будемъ имѣть

$$MA : MB = m : n$$

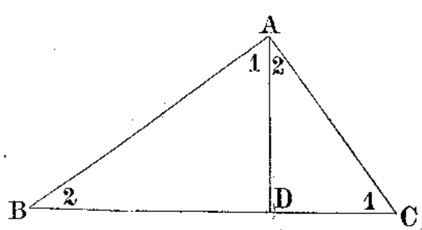
ГЛАВА III.

Числовыя зависимости между элементами треугольника и нѣкоторыхъ другихъ фигуръ.

201. Теорема. *Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорціанальная между гипотенузой и прилежащимъ отрѣзкомъ.*

Пусть AD есть перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла A на гипотенузу BC. Требуется доказать слѣдующія три пропорціи:

$$1^\circ.\ \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC};\quad 2^\circ.\ \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD};\quad 3^\circ.\ \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$$



Черт. 153

Первую пропорцію мы докажемъ изъ подобія тр.-ковъ ABD и ADC, у которыхъ AD общая сторона. Эти тр.-ки подобны, потому что острые углы, обозначенные на чертежѣ одпѣми и тѣми же цыфрами, равны вслѣдствіе перпендикулярности ихъ сторонъ (**82**). Возьмемъ въ $\triangle\ ABD$ тѣ стороны BD и

AD, которыя составляютъ первое отношеніе доказываемой пропорціи; сходственными сторонами (**177**) въ $\triangle\ ADC$ будутъ AD и DC; поэтому

$$BD : AD = AD : DC$$

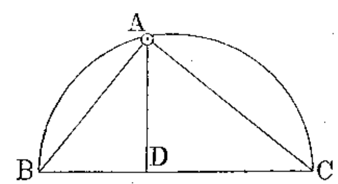
Вторую пропорцію докажемъ изъ подобія тр.-ковъ ABC и ABD, у которыхъ AB общая сторона. Эти тр.-ки подобны, потому что они прямоугольные и острый уголъ B у нихъ общій. Въ $\triangle\ ABC$ возьмемъ тѣ стороны BC и AB, которыя составляютъ первое отношеніе доказываемой пропорціи; сходственными сторонами въ $\triangle\ ABD$ будутъ AB и BD; поэтому

$$BC : AB = AB : BD$$

Третью пропорцію докажемъ изъ подобія тр.-ковъ ABC и ADC, у которыхъ AC общая сторона. Эти тр.-ки подобны, потому что они оба прямоугольные и имѣютъ общій острый уголъ C. Въ $\triangle\ ABC$ возьмемъ стороны BC и AC; сходственными сторонами въ $\triangle\ ADC$ будутъ AC и DC; поэтому

$$BC : AC = AC : DC$$

202. Слѣдствіе. Пусть A есть произвольная точка окружности,, описанной на діаметрѣ BC. Соединивъ концы діаметра съ этою точкою, мы получимъ прямоугольный тр.-къ ABC, у котораго гипотенуза BC есть діаметръ, а катеты суть хорды. Примѣняя доказанную выше теорему къ этому треугольнику, приходимъ къ слѣдующему заключенію:



Черт. 154

Перпендикуляръ, опущенный изъ какой либо точки окружности на діаметръ, есть средняя пропорціанальная между отрѣзками діаметра, а хорда есть средняя пропорціанальная между діаметромъ и прилежащимъ отрѣзкомъ его.

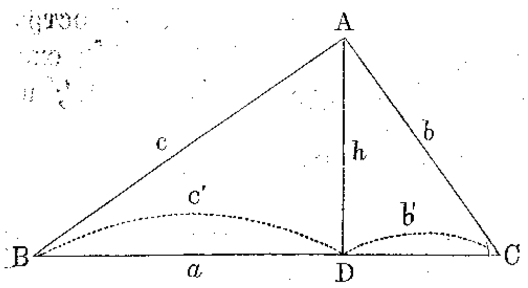
203. Задача. *Построить среднюю пропорціанальную между двумя конечными прямыми a и b.*

Предыдущее слѣдствіе позволяетъ рѣшить эту задачу двоякимъ путемъ.

1°. На произвольной прямой откладываемъ части $BD=a$ и $DC=b$ (черт. 154); на BC, какъ на діаметрѣ, описываемъ полуокружность; изъ D возстановляемъ до пересѣченія съ окружностью перпендикуляръ DA. Этотъ перпендикуляръ и будетъ искомою среднею пропорціональною между BD и DC.

2°. На произвольной прямой откладываемъ части (черт. 154) $BD=a$ и $BC=b$. На большей изъ этихъ частей описываемъ полуокружность. Проведя перпендикуляръ DA, соединяемъ A съ B. Хорда AB будетъ среднею пропопорціональною между BC и BD.

204. Теорема. *Если стороны прямоугольнаго треугольника измѣрены одною единицею, то квадратъ числа, выражающаго гипотенузу, равенъ суммѣ квадратовъ чиселъ, выражающихъ катеты.*



Черт. 155

Пусть ABC есть прямоугольный треугольникъ и AD перпендикуляръ, опущенный на гипотенузу изъ вершины прямого угла. Тогда, по доказанному выше, можемъ написать:

$$BC:AB=AB:BD \quad \text{и} \quad BC:AC=AC:DC$$

Когда стороны даннаго треугольника и отрѣзки гипотенузы выражены числами, то мы можемъ примѣнить къ этимъ пропорціямъ свойства *числовыхъ* пропорцій; тогда:

$$AB^2=BC\,.\,BD \quad \text{и} \quad AC^2=BC\,.\,DC$$

Сложивъ эти два равенства, получимъ:

$$AB^2+AC^2=BC\,(BD+DC)=BC\,.\,BC=BC^2$$

Эту теорему обыкновенно выражаютъ сокращенно, хотя и неправильно, такъ:

Квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ.

205. Численныя примѣненія. Пусть a, b, c, h, b' и c' (черт. 155) будутъ числа, выражающія въ одной единицѣ стороны, высоту и отрѣзки гипотенузы прямоугольнаго тр.-ка ABC. На основаніи доказанныхъ выше теоремъ, мы можемъ вывести слѣдующія 5 уравненій, связывающія эти 6 чиселъ:

$$c^2=ac';\quad b^2=ab';\quad h^2=b'c';\quad b'+c'=a;\quad b^2+c^2=a^2$$

Изъ этихъ уравненій только первыя четыре самостоятельны, а послѣднее составляетъ слѣдствіе двухъ первыхъ; вслѣдствіе этого уравненія позволяютъ по даннымъ двумъ изъ шести чиселъ находить остальныя четыре.

Для примѣра положимъ, что намъ даны отрѣзки гипотенузы: $b'=5$ метровъ и $c'=7$ метр.; тогда

$$a=b'+c'=12;\quad c=\sqrt{ac'}=\sqrt{12\,.\,7}=\sqrt{84}=9{,}165\ldots$$

$$b=\sqrt{ab'}=\sqrt{12\,.\,5}=\sqrt{60}=7{,}744\ldots$$

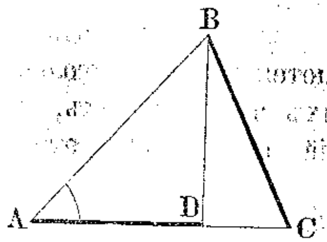
$$h=\sqrt{b'c'}=\sqrt{5\,.\,7}=\sqrt{35}=5{,}916\ldots$$

206. Слѣдствіе. *Квадраты катетовъ относятся между собою, какъ отрѣзки гипотенузы.* Дѣйствительно, изъ уравненій предыдущаго параграфа находимъ:

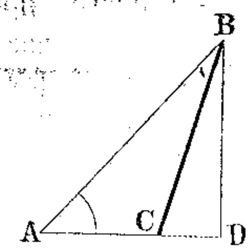
$$c^2:b^2=ac':ab'=c':b'$$

207. Замѣчаніе. Въ послѣдующихъ теоремахъ мы будемъ сокращенно говорить: „квадратъ стороны“ вмѣсто: *квадратъ числа, выражающаго сторону,* или: „произведеніе прямыхъ“ вмѣсто: *произведеніе чиселъ, выражающихъ прямыя.* При этомъ будемъ подразумѣвать, что прямыя измѣрены одною и тою же единицею.

208. Теорема. *Въ треугольникѣ квадратъ стороны, лежащей противъ остраго угла, равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ безъ удвоеннаго произведенія одной изъ* *этихъ сторонъ на отрѣзокъ ея отъ вершины остраго угла до высоты.*



Черт. 156



Черт. 157

Пусть BC будетъ сторона тр.-ка ABC (черт. 156 или 157), лежащая противъ остраго угла A, и BD высота, опущенная на какую либо изъ остальныхъ сторонъ, напр. на AC. Требуется доказать, что

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AC\,.\,AD$$

Изъ прямоугольныхъ тр.-ковъ BDC и ABD выводимъ:

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 \;\; [1] \qquad BD^2 = AB^2 - AD^2 \;\; [2]$$

Съ другой стороны: $DC = AC - AD$ (черт. 156) или $DC = AD - AC$ (черт. 157). Въ обоихъ случаяхъ для DC^2 получимъ одно и то же выраженіе:

$$\left.\begin{array}{l} DC^2 = (AC - AD)^2 = AC^2 - 2\,AC\,.\,AD + AD^2 \\ DC^2 = (AD - AC)^2 = AD^2 - 2\,AD\,.\,AC + AC^2 \end{array}\right\} [3]$$

Подставивъ въ равенство [1] на мѣсто BD^2 и DC^2 ихъ выраженія изъ равенствъ [2] и [3], получимъ:

$$BC^2 = AB^2 - \underline{AD^2} + AC^2 - 2\,AC\,.\,AD + \underline{AD^2}$$

Это равенство, послѣ сокращенія членовъ $-AD^2$ и $+AD^2$, и есть то самое, которое требовалось доказать.

Замѣчаніе. Доказанная теорема остается вѣрною и тогда, когда уголъ C прямой; тогда отрѣзокъ CD обратится въ 0, т.-е. AC сдѣлается равною AD, и мы будемъ имѣть:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AC^2 = AB^2 - AC^2$$

что согласуется съ теоремою о квадратѣ гипотенузы (**204**).

209. Теорема. *Въ треугольникѣ квадратъ стороны, ле-*

жащей противъ тупого угла, равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ, сложенной съ удвоеннымъ произведеніемъ одной изъ этихъ сторонъ на отрѣзокъ ея продолженія отъ вершины тупого угла до высоты.

Пусть AB будетъ сторона тр.-ка ABC (черт. 158), лежащая противъ тупого угла C, и BD — высота, опущенная на какую либо изъ остальныхъ сторонъ; требуется доказать, что

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2\,AC\,.\,CD$$

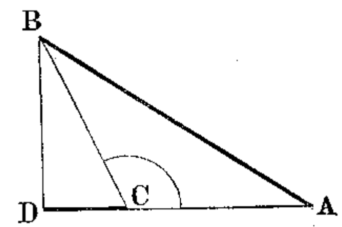
Изъ прямоугольныхъ тр.-ковъ ABD и CBD имѣемъ:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 \qquad [1]$$

$$BD^2 = BC^2 - CD^2 \qquad [2]$$

Но $AD^2 = (AC + CD)^2 =$

$$= AC^2 + 2\,AC\,.\,CD + CD^2 \qquad [3]$$



Черт. 158

Замѣнивъ въ равенствѣ [1] BD^2 и AD^2 ихъ выраженіями изъ равенствъ [2] и [3] найдемъ:

$$AB^2 = BC^2 - \underline{CD^2} + AC^2 + 2\,AC\,.\,CD + \underline{CD^2}$$

что, послѣ сокращенія, даетъ доказываемое равенство.

210. Слѣдствіе. Изъ трехъ послѣднихъ теоремъ выводимъ, что квадратъ стороны треугольника равенъ, меньше или больше суммы квадратовъ другихъ сторонъ, смотря по тому, будетъ ли противулежащій уголъ прямой, острый или тупой. Отсюда слѣдуетъ обратное предложеніе:

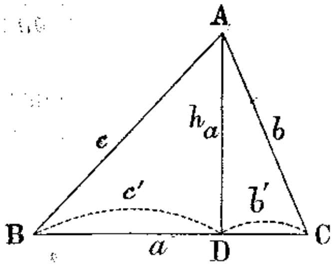
Уголъ треугольника окажется прямымъ, острымъ или тупымъ, смотря по тому, будетъ ли квадратъ противолежащей стороны равенъ, меньше или больше суммы квадратовъ другихъ сторонъ.

Примѣры. 1°. Стороны тр.-ка ABC (черт. 159) суть: $a = 5$, $c = 3$. Такъ какъ $5^2 = 4^2 + 3^2$, то уголъ A *прямой.*

2°. $a = 8$, $b = 7$, $c = 4$. Такъ какъ $8^2 < 7^2 + 4^2$, то уголъ A *острый.*

3°. $a = 8$, $b = 5$, $c = 4$. Такъ какъ $8^2 > 5^2 + 4^2$, то уголъ A *тупой.*

211. Вычисленіе высотъ треугольника по его сторонамъ. Обозначимъ высоту, опущенную на сторону a тр.-ка ABC, черезъ h_a. Чтобы вычислить ее, предварительно изъ уравненія:



Черт. 159

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac'$$

находимъ отрѣзокъ основанія c':

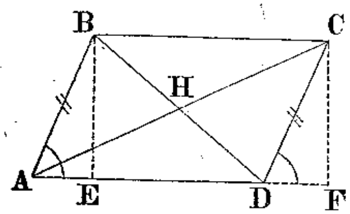
$$c' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

Послѣ чего изъ $\triangle ABD$ опредѣляемъ высоту какъ катетъ:

$$h_a = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2} \quad *)$$

Такимъ же путемъ можно опредѣлить высоты h_b и h_c, опущенныя на стороны b и c.

212. Теорема. *Сумма квадратовъ діагоналей параллелограмма равна суммѣ квадратовъ его сторонъ.*



Черт. 160

Изъ вершинъ B и C параллелограмма $ABCD$ опустимъ на основаніе AD перпендикуляры BE и CF. Тогда изъ тр.-ковъ ABD и ACD находимъ:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - \underline{2AD.AE}$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + \underline{2AD.DF}$$

Прямоугольные тр.-ки ABE и DCF равны, такъ какъ они имѣютъ по равной гипотенузѣ и равному острому углу; поэтому $AE = DF$. Замѣтивъ это, сложимъ два выведенныя выше равенства; тогда подчеркнутые члены сократятся, и мы получимъ:

$$BD^2 + AC^2 = AB^2 + AD^2 + AD^2 + CD^2 = AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2$$

213. Вычисленіе медіанъ треугольника по его сторонамъ. Пусть даны стороны тр.-ка ABC (черт. 160) и требуется вычислить его медіану BH. Для этого продолжимъ ее на раз-

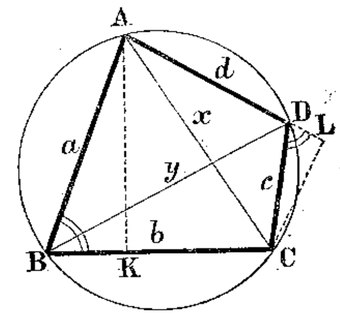
*) Ниже, въ § 278, будетъ дана болѣе простая формула для высоты.

стояніе $HD = BH$ и точку D соединимъ съ A и C. Тогда получимъ параллелограммъ $ABCD$ (**99**,2). Примѣняя къ нему предыдущую теорему, найдемъ:

$$BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2 - AC^2$$

слѣд. $BH = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}$

214. Вычисленіе діагоналей вписаннаго четыреугольника. Обозначимъ стороны вписаннаго четыреугольника $ABCD$ черезъ a, b, c, d и его діагонали черезъ x и y. Проведемъ $AK \perp BC$ и $CL \perp AD$. Такъ какъ сумма противоположныхъ угловъ вписан. четыреугольника равна $2d$, то если уголъ B острый, уголъ D долженъ быть тупымъ; поэтому изъ тр.-ковъ ABC и ADC можемъ написать (**208**, **209**):



Черт. 161

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2b.BK \qquad [1]$$

$$x^2 = c^2 + d^2 + 2d.DL \qquad [2]$$

Прямоугольные тр.-ки ABK и CDL подобны, такъ какъ они содержатъ по равному острому углу (углы B и CDL равны, потому что каждый изъ нихъ служитъ дополненіемъ до $2d$ къ углу ADC). Изъ подобія ихъ выводимъ:

$$BK : a = DL : c$$

откуда $$BK . c = DL . a \qquad [3]$$

Такимъ образомъ мы получили три уравненія съ тремя неизвѣстными x, BK и DL. Чтобы исключить BK и DL, уравняемъ въ первыхъ двухъ равенствахъ послѣдніе члены, для чего умножимъ равенство [1] на cd, а равенство [2] на ab. Сложивъ затѣмъ результаты и принявъ во вниманіе равенство [3], найдемъ:

$$(ab + cd)x^2 = \underline{a^2cd} + b^2cd + \underline{c^2ab} + d^2ab$$

$$= ac(ad + bc) + bd(bc + ad)$$

$$= (ac + bd)(ad + bc)$$

Откуда $x = \sqrt{\dfrac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}$

Замѣтимъ, что въ числителѣ подкоренной величины первый множитель есть сумма произведеній противоположныхъ сторонъ, а второй — сумма произведеній сторонъ, сходящихся въ концахъ опредѣляемой діагонали, знаменатель же представляетъ сумму произведеній сторонъ, сходящихся въ концахъ другой діагонали; послѣ этого мы можемъ, по аналогіи, написать слѣдующую формулу для діагонали y:

$$y=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$$

215. Слѣдствіе 1°. *Произведеніе діагоналей вписаннаго четыреугольника равно суммѣ произведеній противоположныхъ сторонъ.*

Дѣйствительно, перемноживъ формулы, выведенныя для x и для y, получимъ:

$$xy=\sqrt{(ac+bd)^2}=ac+bd$$

Это предложеніе извѣстно подъ именемъ **теоремы Птоломея.**

216. Слѣдствіе 2°. *Отношеніе діагоналей вписаннаго четыреугольника равно отношенію суммы произведеній сторонъ, сходящихся въ концахъ первой діагонали, къ суммѣ произведеній сторонъ, сходящихся въ концахъ второй діагонали.*

Дѣйствительно, раздѣливъ тѣ же два равенства, найдемъ:

$$\frac{x}{y}=\sqrt{\frac{(ad+bc)^2}{(ab+cd)^2}}=\frac{ad+bc}{ab+cd} \quad *)$$

Эти два слѣдствія удобны для запоминанія; изъ нихъ можно, обратно, вывести формулы для x и для y (перемноженіемъ или дѣленіемъ равенствъ, опредѣляющихъ xy и $\frac{x}{y}$).

217. Задача. *По двумъ сторонамъ a и b треугольника ABC и радіусу R описаннаго круга вычислить третью сторону x треугольника.*

Проведя діаметръ CD и хорды AD и BD, получимъ вписанный четыреугольникъ $ACBD$, въ которомъ $DC=2R$, $AD=\sqrt{DC^2-AC^2}=$

---

*) Изложенный способъ вычисленія діагоналей вписаннаго четыреугольника сообщенъ намъ г. *Попруженко* (инспекторомъ Неплюевскаго Оренбургскаго корпуса).

$=\sqrt{4R^2-b^2}$ (изъ прямоугольнаго тр.-ка ACD) и $BD=\sqrt{DC^2-BC^2}=$ $=\sqrt{4R^2-a^2}$ (изъ прям. тр.-ка BCD).

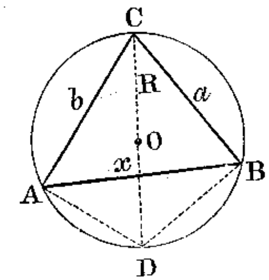
Примѣняя къ этому четыреугольнику теорему Птоломея, будемъ имѣть:

$$2Rx=a\sqrt{4R^2-b^2}+b\sqrt{4R^2-a^2}$$

откуда легко найдемъ x.

Задача будетъ имѣть другое рѣшеніе, если предположимъ, что стороны a и b лежатъ *по одну сторону* отъ центра. Примѣняя къ этому случаю теорему Птоломея, мы получимъ слѣдующее уравненіе:

$$2Rx=a\sqrt{4R^2-b^2}-b\sqrt{4R^2-a^2}$$



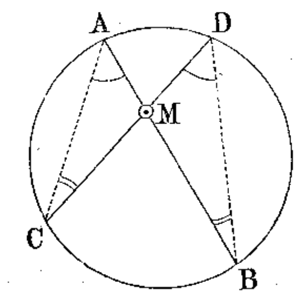
Черт. 162

218. Теорема. *Если черезъ одну и ту же точку внутри круга проведены нѣсколько хордъ, то произведеніе двухъ отрѣзковъ каждой хорды есть величина постоянная.*

Пусть черезъ точку M проведены двѣ хорды AB и CD; требуется доказать, что

$$AM.MB=DM.MC$$

Проведемъ вспомогательныя хорды AC и BD; тогда получимъ два тр.-ка AMC и BMD, которые подобны, потому что углы A и C одного изъ нихъ равны соотвѣтственно угламъ D и B другого (какъ углы вписанные, опирающіеся на одну и ту же дугу). Изъ подобія ихъ выводимъ:



Черт. 163

$$AM:MD=CM:MB$$

Откуда: $AM.MB=CM.MD$.

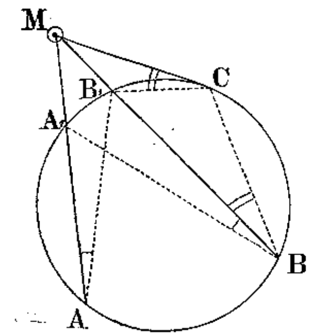
219. Теорема. *Если черезъ одну и ту же точку внѣ круга проведены нѣсколько сѣкущихъ и касательная, то:*

1°, *произведеніе каждой сѣкущей на ея внѣшнюю часть есть величина постоянная;*

2°, *эта постоянная величина равна квадрату касательной.*

Пусть черезъ точку M проведены двѣ сѣкущія MA и MB и касательная MC; требуется доказать, что

$$MA.MA_1=MB.MB_1=MC^2$$



Черт. 164

1° Проведемъ вспомогательныя хорды AB_1 и BA_1; тогда получимъ тр.-ки MAB_1 и MA_1B, которые подобны, потому что у нихъ уголъ M общій, а углы A и B равны, какъ вписанные, опирающіеся на одну дугу. Изъ подобія ихъ слѣдуетъ:

$$MA:MB=MB_1:MA_1$$

Откуда: $MA.MA_1=MB.MB_1$

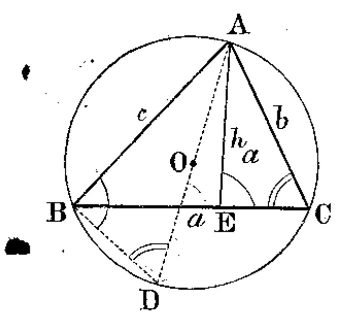
2°. Проведемъ вспомогательныя хорды B_1C и BC; тогда получимъ два тр.-ка MBC и MB_1C, которые подобны, потому что у нихъ уголъ M общій, и углы MCB_1 и CBM равны, такъ какъ каждый изъ нихъ измѣряется половинкою дуги B_1C, (**155**, **163**). Возьмемъ въ $\triangle\ MBC$ стороны MB и MC; сходственными сторонами въ $\triangle\ MB_1C$ будутъ MC и MB_1; поэтому:

$$MB:MC=MC:MB_1$$

Откуда: $MB.MB_1=MC^2$

Значитъ: $MA.MA_1=MB.MB_1=MC^2$.

220. Теорема. *Произведеніе двухъ сторонъ треугольника равно:*



Черт. 165

1°, *произведенію діаметра описаннаго круга на высоту, проведенную къ третьей сторонѣ;*

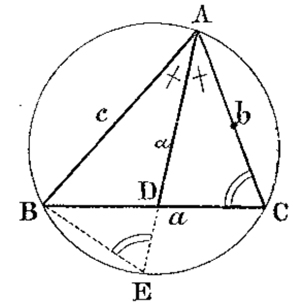
2°, *квадрату биссектриссы угла, заключеннаго между этими сторонами, сложенному съ произведеніемъ отрѣзковъ третьей стороны.*

1° Обозначимъ стороны тр.-ка ABC черезъ a, b и c, высоту, опущенную на сторону a, черезъ h_a, а радіусъ описаннаго круга черезъ R. Проведемъ діаметръ AD и соединимъ D съ B. Тр. ки ABD и AEC подобны, потому что углы B и E прямые и $D=C$, какъ углы вписанные, опирающіеся на одну и ту же дугу. Изъ подобія выводимъ:

$$c:h_a=2R:b$$

Откуда: $$bc=2R.h_a \qquad [1]$$

2° Обозначимъ биссектриссу угла A черезъ α (черт. 166). Продолжимъ ее до пересѣченія съ описанною окружностью въ точкѣ E (эта точка лежитъ въ срединѣ дуги BC, такъ какъ углы BAE и EAC, по условію, равны). Тр.-ки ABE и ADC подобны, потому что углы при точкѣ A равны по условію, и $C=E$, какъ углы вписанные, опирающіеся на одну дугу. Изъ подобія ихъ слѣдуетъ:



Черт. 166

$c:\alpha=AE:b$; откуда $bc=\alpha.AE$

или $bc=\alpha(\alpha+DE)=\alpha^2+\alpha.DE$

Но $\alpha.DE=BD.DC$ (**218**)

Поэтому $bc=\alpha^2+BD.DC$ [2]

221. Вычисленіе радіуса описаннаго круга и биссектриссъ угловъ. Изъ равенства [1] предыдущаго параграфа находимъ:

$$R=\frac{bc}{2h_a}$$

Если вставимъ на мѣсто h_a выраженіе, найденное для высоты раньше (**211**), то получимъ формулу, опредѣляющую R въ зависимости отъ a, b и c.

Изъ равенства [2] того же параграфа выводимъ:

$$\alpha^2=bc-BD.DC$$

Отрѣзки BD и DC можно найти изъ пропорціи $BD:DC=c:b$ (**198**); откуда:

$$\frac{BD+DC}{BD}=\frac{b+c}{c} \text{ и } \frac{BD+DC}{DC}=\frac{b+c}{b}$$

Замѣтивъ, что $BD+DC=a$, получимъ:

$$BD=\frac{ac}{b+c} \qquad DC=\frac{ab}{b+c}$$

Слѣд. $\alpha^2=bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=\frac{bc}{(b+c)^2}\left[(b+c)^2-a^2\right]=\frac{bc}{(b+c)^2}\left[(b+c+a)(b+c-a)\right]$

Это выраженіе можно упростить, если обозначимъ периметръ тр.-ка, т. е. $a+b+c$, черезъ $2p$; тогда $b+c-a=2p-2a=2(p-a)$ и

$$\alpha=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

ГЛАВА IV.

Понятіе о приложеніи алгебры къ геометріи.

222. Задача. *Данную конечную прямую раздѣлить въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.*

Эту задачу надо понимать такъ: раздѣлить данную прямую на такія двѣ части, чтобы бо́льшая изъ нихъ была среднею пропорціанальною между всею линіей и меньшею ея частью.

Задача, очевидно, будетъ рѣшена, если мы найдемъ одну изъ двухъ частей, на которыя требуется раздѣлить данную прямую. Будемъ находить бо́льшую часть, т.-е. ту, которая должна быть *среднею пропорціональною* между всей линіей и меньшею ея частью. Предположимъ сначала, что рѣчь идетъ не о построеніи этой части, а только объ ея *вычисленіи*. Тогда задача рѣшается *алгебраически* такъ: если длину данной прямой обозначимъ a, а большей ея части x, то длина другой части выразится $a-x$, и согласно требованію задачи мы будемъ имѣть пропорцію:

$$a : x = x : a - x$$

откуда:

$$x^2 = a(a-x)$$

или

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Рѣшивъ это квадратное уравненіе, находимъ:

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} \quad x_{11} = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$$

Отбросивъ второе рѣшеніе, какъ отрицательное*), возьмемъ только первое, положительное, рѣшеніе, которое удобнѣе представить такъ:

$$x_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2} \qquad [1]$$

Чтобы убѣдиться, годится ли это рѣшеніе для предложенной задачи, необходимо показать, что величина x_1 меньше a. Въ этомъ легко убѣдиться, преобразуя радикалъ такъ:

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

Такъ какъ $\sqrt{5} < 3$, то $\frac{a}{2}\sqrt{5} < \frac{3}{2}a$, и потому разность $\frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2}$ меньше разности $\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}a$, т. е. меньше a. Та-

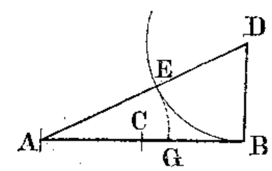
*) Не трудно было бы показать, что отрицательное рѣшеніе, будучи взято со знакомъ +, даетъ отвѣтъ на измѣненную задачу: *данную прямую a продолжить на столько (на x), чтобы продолженіе было средней пропорціональной между a и a + x.*

кимъ образомъ, мы прежде всего видимъ, что задача *всегда* возможна и имѣетъ только *одно* рѣшеніе. Если бы намъ теперь удалось *построить* такую прямую, которой длина выражается формулой [1], то, нанеся эту длину на данную прямую, мы раздѣлили бы ее въ среднемъ и крайнемъ отношеніи. Итакъ, вопросъ сводится къ *построенію формулы* [1].

Разсматривая отдѣльно выраженіе $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$, мы замѣчаемъ, что оно представляетъ собою длину гипотенузы такого прямоугольнаго тр.-ка, у котораго одинъ катетъ равенъ a, а другой $^a/_2$. Построивъ такой тр.-къ, мы найдемъ прямую, выражаемую формулой $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$. Чтобы получить затѣмъ длину x_1, достаточно изъ гипотенузы построеннаго треугольника вычесть $^a/_2$.

Такимъ образомъ, построеніе можно выполнить такъ:

Дѣлимъ данную прямую AB пополамъ въ точкѣ C. Изъ конца B возстановляемъ перпендикуляръ BD и откладываемъ на немъ $BD = BC$. Соединивъ A съ D, получимъ прям. тр.-къ ABD, у котораго катетъ $AB = a$, а другой катетъ $BD = {}^a/_2$.



Черт. 167

Слѣд., его гипотенуза AD равна $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$. Чтобы вычесть изъ гипотенузы длину $^a/_2$, опишемъ изъ D, какъ центра, дугу радіусомъ $DB = {}^a/_2$. Тогда отрѣзокъ AE будетъ равенъ $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$ т.-е. будетъ равенъ x_1. Отложивъ AE на AB (отъ A до G), получимъ точку G, въ которой AB раздѣлится въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

223. Алгебраическій способъ рѣшенія геометр. задачъ. Мы рѣшили предложенную задачу путемъ *приложенія алгебры къ геометріи*. Этотъ весьма плодотворный пріемъ состоитъ въ слѣдующемъ: сперва опредѣляютъ, какую линію должно отыскать, чтобы можно было рѣшить задачу. Затѣмъ, обозначивъ данныя линіи буквами a, b, c..., а искомую буквою x, составляютъ изъ условій задачи и извѣстныхъ теоремъ уравненіе, связывающее искомую линію съ данными; полученное уравненіе рѣшаютъ по правиламъ алгебры. Найденную формулу *изслѣдуютъ*, т. е. опредѣляютъ, при всякихъ ли заданіяхъ эта формула дастъ возможныя рѣшенія, или только при нѣкоторыхъ, и получается ли одно рѣшеніе или нѣсколько. Затѣмъ *строятъ* формулу, т. е. находятъ построеніемъ такую линію, которой численная величина выражается этой формулой.

Такимъ образомъ, алгебраическій пріемъ рѣшенія геометрическихъ задачъ состоитъ изъ слѣдующихъ 4-хъ частей: 1°, *составленіе уравненія*, 2°, *рѣшеніе его*, 3°, *изслѣдованіе полученной формулы* и 4°, *построеніе ея*.

Иногда задача приводится къ отысканію нѣсколькихъ линій. Тогда, обозначивъ ихъ буквами x, y, z...., стремятся составить столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ.

224. Построеніе простѣйшихъ формулъ. Укажемъ простѣйшія формулы, которыя можно построить посредствомъ циркуля и линейки; при этомъ будемъ предполагать, что буквы a, b, c.... означаютъ данныя прямыя, а x искомую. Не останавливаясь на такихъ формулахъ:

$$x=a+b+c,\quad x=a-b,\quad x=2a,\ 3a,\dots$$

построеніе которыхъ весьма просто, перейдемъ къ слѣдующимъ:

1. Формулы: $x=\frac{a}{2}, \frac{a}{3},\dots$ $x=\frac{2}{3}a\dots$ строятся посредствомъ дѣленія прямой a на равныя части (**65**,7, **101**) и затѣмъ, если нужно, повтореніемъ одной части слагаемымъ 2, 3.... раза.

2. Формула $x=\frac{ab}{c}$ представляетъ собою *четвертую пропорціанальную* къ прямымъ c, a и b. Дѣйствительно, изъ этого равенства выводимъ:

$$cx=ab;\ \text{откуда}\ c:a=b:x.$$

Слѣд., x найдется способомъ, указаннымъ выше (**196**) для построенія 4-ой пропорціанальной.

3. Формула $x=\frac{a^2}{b}$ выражаетъ четвертую пропорціональную къ прямымъ b, a и a, или, какъ говорятъ, *третью пропорціанальную* къ прямымъ b и a. Дѣйствительно, изъ даннаго равенства выводимъ:

$$bx=a^2;\ \text{откуда}\ b:a=a:x.$$

Слѣд., x найдется тѣмъ же способомъ, какимъ отыскивается 4-я пропорціанальная (прямую a придется откладывать два раза).

4. Формула $x=\sqrt{ab}$ выражаетъ *среднюю пропорціанальную* между a и b. Дѣйствительно, изъ нея выводимъ:

$$x^2=ab;\ \text{откуда}\ a:x=x:b.$$

Слѣд., x найдется способомъ, указаннымъ раньше для построенія средней пропорціональной (**203**).

5. Формула $x=\sqrt{a^2+b^2}$ выражаетъ *гипотенузу* прямоугольнаго тр.-ка, у котораго катеты суть a и b.

6. Формула $x=\sqrt{a^2-b^2}$ представляетъ *катетъ* прямоуг. тр.-ка, у котораго гипотенуза есть a, а другой катетъ b. Построеніе всего удобнѣе выполнить такъ какъ указано въ § 158.

Указанныя формулы можно считать *основными*. При помощи ихъ строятся болѣе сложныя формулы. Напр.:

7. $x=\frac{abcd}{efg}$. Разобьемъ дробь на множителей такъ: $x=\frac{ab}{e}\cdot\frac{c}{f}\cdot\frac{d}{g}$ и положимъ, что $\frac{ab}{e}=k$. Тогда k найдемъ, какъ 4-ю пропорціанальную къ e, a и b. Найдя k, будемъ имѣть: $x=\frac{kc}{f}\cdot\frac{d}{g}$. Положимъ, что $\frac{kc}{f}=l$. Тогда l найдемъ, какъ 4-ю пропорціанальную къ линіямъ f, k и c. Найдя l, будемъ имѣть $x=\frac{ld}{g}$; слѣд., x есть 4-я пропорціанальная къ g, l и d.

Подобнымъ образомъ строятся также и формулы вида:

$$x=\frac{abc\dots kl}{a_1b_1c_1\dots k_1}\quad\text{или}\quad x=\frac{a^m}{b^{m-1}}$$

т. е. такія формулы, въ которыхъ числитель и знаменатель представляютъ *произведеніе* линейныхъ множителей (т.-е. буквъ, означающихъ линіи), причемъ числитель содержитъ этихъ множителей на одинъ больше, чѣмъ знаменатель.

8. $x=a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Подведя a подъ знакъ радикала, получимъ:

$$x=\sqrt{\frac{2}{3}a^2}=\sqrt{a.\frac{2}{3}a}$$

Отсюда видимъ, что x есть средняя пропорціанальная между прямыми a и $^2/_3 a$.

9. $\sqrt{a^2+b^2-c^2+d^2}$. Положимъ, что $a^2+b^2=k^2$. Тогда k найдется, какъ гипотенуза прямоуг. тр.-ка, у котораго катеты суть a и b. Построивъ k, положимъ, что $k^2-c^2=l^2$. Тогда l найдется, какъ катетъ такого прям. тр.-ка, у котораго гипотенуза есть k, а другой катетъ c. Построивъ l, будемъ имѣть: $x=\sqrt{l^2+d^2}$. Слѣд., x есть гипотенуза тр.-ка, у котораго катеты суть l и d.

10. $x=\sqrt[4]{a^4-b^4}$. Положимъ, что

$$a^4=b^3y, \quad \text{т.-е.} \quad y=\frac{a^4}{b^3}=\frac{a^2}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}$$

Отсюда видно, что y найдется посредствомъ троекратнаго построенія 4-ой пропорціанальной. Построивъ y, будемъ имѣть:

$$x=\sqrt[4]{b^3y-b^4}=\sqrt{\sqrt{b^3(y-b)}}=\sqrt{b\sqrt{b(y-b)}}$$

Выраженіе $\sqrt{b(y-b)}$ представляетъ линію, которая есть средняя пропорціанальная между b и $y-b$. Пусть эта линія будетъ k. Тогда $x=\sqrt{bk}$; значитъ, x найдется, какъ средняя пропорціанальная между b и k.

Ограничимся этими примѣрами. Замѣтимъ, что подробное разсмотрѣніе способовъ построенія алгебраическихъ формулъ приводитъ къ слѣдующему важному выводу:

помощью циркуля и линейки возможно строить только такія алгебраическія выраженія, которыя или вовсе не содержатъ радикаловъ, или же содержатъ радикалы съ показателемъ 2, 4, 8...., т. е. съ показателемъ, равнымъ степени 2-хъ.

УПРАЖНЕНІЯ.

Доказать теоремы:

189. Прямая, проведенная черезъ средины основаній трапеціи, проходитъ черезъ точку пересѣченія непараллельныхъ сторонъ и черезъ точку пересѣченія діагоналей.

190. Если два круга касаются извнѣ, то часть внѣшней общей касательной, ограниченная точками касанія, есть средняя пропорціанальная между діаметрами круговъ.

191. Сумма квадратовъ сторонъ треугольника равна утроенной суммѣ квадратовъ разстояній точки пересѣченія медіанъ отъ вершинъ треугольника (§ 212).

192. Если въ прямоугольный тр.-къ ABC вписать квадратъ $DEFG$ такъ, чтобы сторона DE совпадала съ гипотенузой BC, то эта сторона есть средняя пропорціанальная между отрѣзками гипотенузы BD и EC.

193. Если двѣ конечныя прямыя AB и CD пересѣкаются (хотя бы и при продолженіи) въ точкѣ E такъ, что

$$EA \,.\, EB = EC \,.\, ED$$

то точки A, B, C и D лежатъ на одной окружности (эта теорема обратна изложеннымъ въ §§ 218 и 219).

194. Дана окружность O и двѣ точки A и B внѣ ея. Черезъ эти точки проведены нѣсколько окружностей, пересѣкающихъ окружность O, или касающихся ея. Доказать, что всѣ хорды, соединяющія точки пересѣченія каждой изъ этихъ окружностей съ окружностью O, а также и общія касательныя, сходятся (при продолженіи) въ одной точкѣ, лежащей на продолженіи прямой AB.

195. Основываясь на этомъ, вывести способъ построенія такой окружности, которая проходитъ черезъ 2 данныя точки A и B и касается данной окружности O.

196. Даны два какіе-нибудь круга на плоскости. Если два радіуса этихъ круговъ движутся, оставаясь постоянно параллельными, то прямая, проходящая черезъ концы ихъ, пересѣкаетъ линію центровъ всегда въ одной точкѣ (эта точка наз. *центромъ подобія* двухъ круговъ).

197. Медіана тр.-ка дѣлитъ пополамъ всѣ прямыя, проведенныя внутри тр.-ка параллельно той сторонѣ, относительно которой взята медіана.

198. Даны три прямыя, исходящія изъ одной точки. Если по одной изъ нихъ движется какая-нибудь точка, то разстоянія ея отъ двухъ другихъ прямыхъ сохраняютъ всегда одно и то же отношеніе.

199. Если двѣ окружности концентрическія, то сумма квадратовъ разстояній всякой точки одной изъ нихъ отъ концовъ какого угодно діаметра другой есть величина постоянная (§ 212).

200. Если изъ трехъ вершинъ тр.-ка и изъ точки пересѣченія его медіанъ опустимъ перпендикуляры на какую-нибудь внѣшнюю прямую, то послѣдній изъ 4-хъ перпендикуляровъ равенъ третьей части суммы первыхъ трехъ.

201. Если соединимъ прямыми основанія трехъ высотъ какого-нибудь тр.-ка, то образовавшіеся при этомъ 3 тр.-ка у вершинъ даннаго подобны ему. Вывести отсюда, что для тр.-ка, имѣющаго сторонами прямыя, соединяющія основанія высотъ даннаго тр.-ка, эти высоты служатъ биссектриссами.

202. Діаметръ AB данной окружности продолженъ за точку B. Черезъ какую-нибудь точку этого продолженія проведена неопредѣленная прямая

$CD \perp AB$. Если произвольную точку M этого перпендикуляра соединимъ съ A, то (обозначивъ черезъ A_1 вторую точку пересѣченія съ окружностью этой прямой) произведеніе $AM \cdot AA_1$ есть величина постоянная.

Найти геометрическія мѣста:

203. — срединъ всѣхъ хордъ, проходящихъ черезъ данную точку окружности.

204. — точекъ, дѣлящихъ въ одномъ и томъ же отношеніи $m:n$ всѣ хорды, проходящія черезъ данную точку окружности.

205. — точекъ, которыхъ разстоянія отъ сторонъ даннаго угла имѣютъ одно и то же отношеніе $m:n$.

206. — точекъ, для которыхъ сумма квадратовъ разстояній отъ двухъ данныхъ точекъ есть величина постоянная (§ 212).

207. — точекъ, для которыхъ разность квадратовъ разстояній отъ двухъ данныхъ точекъ есть величина постоянная.

208. — точекъ, изъ которыхъ касательныя, проведенныя къ двумъ даннымъ окружностямъ, равны (это геометр. мѣсто есть прямая, перпендикулярная къ линіи центровъ; она наз. *радикальною осью* двухъ круговъ).

209. — точекъ, дѣлящихъ въ данномъ отношеніи $m:n$ всѣ прямыя, соединяющія точки окружности съ данною точкою O (лежащую внѣ или внутри окружности).

210. Даны двѣ извнѣ касающіяся окружности. Черезъ точку касанія A проводятъ въ окружностяхъ двѣ перпендикулярныя хорды AB и AC. Концы ихъ B и C соединяютъ прямой. Найти геометр. мѣсто точекъ, дѣлящихъ BC въ данномъ отношеніи $m:n$.

211. Данный уголъ вращается вокругъ своей вершины. На сторонахъ его, отъ вершины, откладываютъ перемѣнныя длины, но которыхъ отношеніе постоянно. Если конецъ одной стороны описываетъ данную по положенію прямую, какую линію опишетъ другой конецъ?

Задачи на построеніе:

212. Черезъ точку, данную внутри или внѣ угла, провести прямую такъ, чтобы части ея, заключенныя между этой точкой и сторонами угла, имѣли данное отношеніе $m:n$.

213. Найти въ треугольникѣ такую точку, чтобы перпендикуляры, опущенные изъ нея на стороны, находились въ данномъ отношеніи $m:n:p$ (см упражненіе 205).

214. Построить тр.-къ по углу, одной изъ сторонъ, прилежащихъ къ нему и отношенію этой стороны къ третьей сторонѣ (сколько рѣшеній?).

215. То же—по углу при вершинѣ, основанію и отношенію его къ одной изъ боковыхъ сторонъ.

216. То же—по высотѣ, углу при вершинѣ и отношенію отрѣзковъ основанія.

217. То же—по углу при вершинѣ, основанію и данной на основаніи точкѣ, черезъ которую проходитъ биссектрисса угла при вершинѣ.

218. То же—по двумъ угламъ и суммѣ или разности основанія съ высотою.

219. Построить равнобедренный тр.-къ по углу при вершинѣ и суммѣ основанія съ высотою.

220. Вписать въ данный кругъ тр.-къ, у котораго даны: основаніе и отношеніе двухъ другихъ сторонъ.

221. Вписать въ данный кругъ тр.-къ, у котораго даны: основаніе и медіана относительно одной изъ неизвѣстныхъ сторонъ (см. упражненіе 203).

222. Вписать квадратъ въ данный сегментъ такъ, чтобы одна его сторона лежала на хордѣ, а вершины противолежащихъ угловъ на дугѣ.

223. Вписать квадратъ въ данный тр.-къ такъ, чтобы одна сторона его лежала на основаніи тр.-ка, а вершины противолежащихъ угловъ на боковыхъ сторонахъ тр.-ка.

224. Въ данный треугольникъ вписать прямоугольникъ (см. пред. задачу), у котораго стороны относились бы, какъ $m:n$.

225. Около даннаго квадрата описать тр.-къ, подобный данному.

226. Дана окружность и на ней двѣ точки A и B. Найти на этой окружности третью точку C, чтобы разстоянія ея отъ A и B находились въ данномъ отношеніи.

227. На данной прямой найти точку, которая одинаково была бы удалена отъ другой данной прямой и данной точки.

228. Построить тр.-къ по двумъ сторонамъ и биссектриссѣ угла между ними (см. черт. 151. Сначала находимъ прямую DE изъ пропорціи $AB:EC$ (т.-е. BC) $= BD:DE$; затѣмъ строимъ BCE;...).

229. Построить прямую x, которая относилась бы къ данной прямой m, какъ $a^2:b^2$ (a и b данныя прямыя).

230. Найти внѣ даннаго круга такую точку, чтобы касательная, проведенная изъ нея къ этой окружности, была вдвое менѣе сѣкущей, проведенной изъ этой же точки черезъ центръ (приложеніемъ алг. къ геом).

231. Черезъ данную внѣ окружности точку провести такую сѣкущую, которая раздѣлилась бы этою окружностью въ данномъ отношеніи (прил. алг. къ геом.).

232. Построить тр.-къ по тремъ его высотамъ h_1, h_2 и h_3. (Предварительно изъ подобія прямоуг. тр. ковъ надо доказать, что высоты *обратно пропорціанальны* соотвѣтствующимъ сторонамъ. Если стороны, на которыя опущены высоты h_1, h_2 и h_3, обозначимъ соотвѣтственно черезъ x_1, x_2 и x_3, то

$$x_1 : x_2 = h_2 : h_1$$

$$x_2 : x_3 = h_3 : h_2 = 1 : \frac{h_2}{h_3} = h_1 : \frac{h_1h_2}{h_3}$$

откуда

$$x_1 : x_2 : x_3 = h_2 : h_1 : \frac{h_1h_2}{h_3}$$

Выраженіе $\frac{h_1h_2}{h_3}$ есть четвертая пропорціанальная къ h_3, h_2 и h_1. Построивъ ее, мы будемъ имѣть три прямыя: h_2, h_1 и $\frac{h_1h_2}{h_3}$, которымъ искомыя стороны пропорціанальны; значитъ, тр.-къ, имѣющій эти прямыя сторонами, будетъ *подобенъ* искомому, и потому вопросъ сведется къ построенію такого тр.-ка, который, будучи подобенъ данному, имѣлъ бы данную высоту. Задача будетъ невозможна, если по тремъ прямымъ: h_1, h_2 и $\frac{h_1h_2}{h_3}$ нельзя построить треугольникъ (49).

Задачи на вычисленіе:

233. По данному основанію a и высотѣ h остроугольнаго тр.-ка вычислить сторону x квадрата, вписаннаго въ этотъ тр.-къ такъ, чтобы одна сторона квадрата лежала на основаніи тр.-ка, а двѣ вершины квадрата на боковыхъ сторонахъ тр.-ка.

234. Стороны тр.-ка суть 10 ф., 12 ф. и 17 ф. Вычислить отрѣзки стороны, равной 17 ф., на которые она дѣлится биссектриссою противолежащаго угла.

235. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, *дѣлитъ ее на два отрѣзка m и n.* Вычислить катеты.

236. Вычислить высоту тр.-ка, опущенную на сторону, равную 20, если двѣ другія стороны суть 12 и 15.

237. Вычислить медіаны тр.-ка, котораго стороны суть $a = 5$, $b = 7$ и $c = 9$.

238. Въ тр-кѣ ABC стороны суть: $AB = 7$, $BC = 15$ и $AC = 10$. Опредѣлить, какого вида уголъ A, и вычислить высоту, опущенную изъ вершины B.

239. Изъ точки внѣ круга проведены касательная a и сѣкущая. Вычислить длину сѣкущей, зная, что отношеніе внѣшней ея части къ внутренней равно $m : n$.

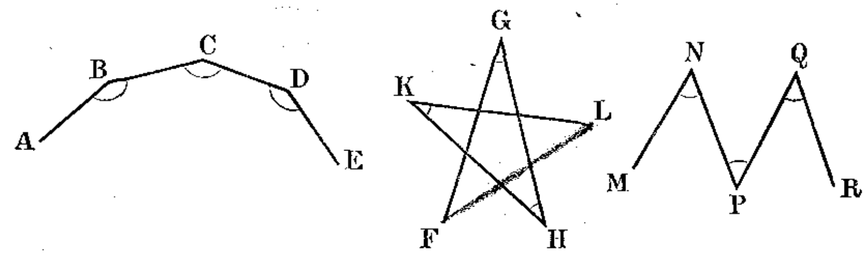
240. Къ двумъ кругамъ, которыхъ радіусы суть R и r, а разстояніе между центрами d, проведена общая касательная. Опредѣлить вычисленіемъ положеніе точки пересѣченія этой касательной съ линіей центровъ во 1, когда эта точка лежитъ по одну сторону отъ центровъ, во 2, когда *она расположена между ними.*

ГЛАВА IV.

Правильные многоугольники.

225. Опредѣленія. Ломаная линія наз. *правильной*, если она удовлетворяетъ слѣдующимъ тремъ условіямъ: 1°, отрѣзки

прямыхъ, составляющіе ее, равны, 2°, углы составленные каждыми двумя сосѣдними отрѣзками, равны, и 3°, изъ каждыхъ трехъ послѣдовательныхъ отрѣзковъ первый и третій расположены по одну сторону отъ второго.

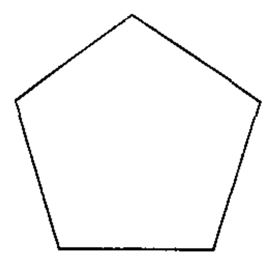


Черт. 168

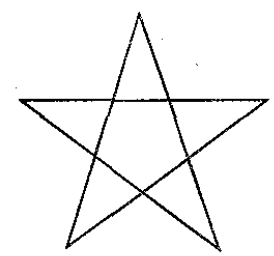
Таковы, напр., линіи $ABCDE$ и $FGHKL$; но ломаную $MNPQR$ нельзя назвать правильною, потому что она не удовлетворяетъ третьему условію.

Правильная ломаная можетъ быть *выпуклой* (**33**), какъ напр., линія $ABCDE$.

Многоугольникъ наз. *правильнымъ*, если онъ ограниченъ замкнутою правильною ломаною линіей. Таковы, напр., квадратъ, равносторонній треугольникъ и другіе.



Черт. 169



Черт. 170

Многоугольникъ, изображенный на чертежѣ 169, есть *выпуклый* правильный пятиугольникъ; мн.-къ чертежа 170 также правильный пятиугольникъ, но не выпуклый *(звѣздчатый)*. Мы будемъ разсматривать только выпуклые прав. мн.-ки.

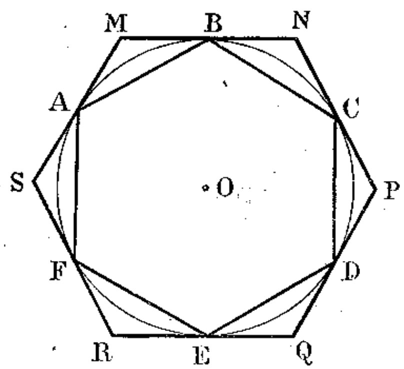
Слѣдующая теорема показываетъ, что выпуклые правильные многоугольники возможны съ произвольнымъ числомъ сторонъ (бо́льшимъ двухъ).

226. Теорема. *Если окружность раздѣлена на произвольное число равныхъ частей* (бо́льшее двухъ), *то*

1°, *соединивъ хордами каждыя двѣ сосѣднія точки дѣленія, получимъ правильный вписанный многоугольникъ;*

2°, *проведя черезъ всѣ точки дѣленія касательныя до взаимнаго пересѣченія, получимъ правильный описанный многоугольникъ.*

Пусть окружность раздѣлена на нѣсколько равныхъ частей въ точкахъ $ABC...$ и черезъ эти точки проведены хорды AB, BC... и касательныя MN, NP..... Тогда:



Черт. 171

1°. Мног.-къ $ABCDEF$ будетъ правильный, потому что всѣ его стороны равны (какъ хорды, стягивающія равныя дуги) и всѣ его углы равны (какъ вписанные, опирающіеся на равныя дуги).

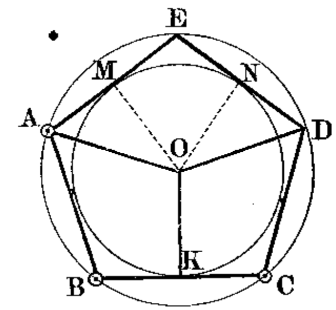
2°. Чтобы доказать правильность описаннаго многоугольника $MNPQRS$, разсмотримъ тр.-ки AMB, BNC и т. д. У нихъ основанія AB, BC и т. д. равны; углы, прилежащіе къ основаніямъ, также равны, потому что каждый изъ нихъ имѣетъ одинаковую мѣру (уголъ, составленный касательною и хордой, измѣряется половиною дуги, заключенной внутри его). Значитъ, всѣ эти тр.-ки равнобедренные и равны между собою; а потому $MN=NP=...$ и $M=N=...$ т. е. мн.-къ $MNPQRS$ есть правильный.

227. Замѣчаніе. Если возьмемъ средины дугъ AB, BC, CD.... (черт. 171), то получимъ точки, которыя дѣлятъ окружность на столько же равныхъ частей, на сколько она раздѣлена въ точкахъ A, B, C.... Поэтому, если черезъ эти средины проведемъ касательныя до взаимнаго пересѣченія, то получимъ также правильный описанный многоугольникъ; стороны этого многоугольника будутъ параллельны сторонамъ вписаннаго мн.-ка $ABCDEF$.

228. Теорема. *Если многоугольникъ правильный, то*

1°, *около него можно описать окружность;*

2°, *въ него можно вписать окружность.*



Черт. 172

1°. Проведемъ окружность черезъ какія-нибудь три сосѣднія вершины A, B и C (черт. 172) правильнаго мн.-ка $ABCDE$ и докажемъ, что она пройдетъ черезъ четвертую вершину D. Опустимъ изъ центра O перпендикуляръ OK на хорду BC и соединимъ O съ A и D. Повернемъ четыреугольникъ $ABKO$ вокругъ стороны OK такъ, чтобы онъ упалъ на четыреуг.-къ $ODCK$. Тогда KB пойдетъ по KC (вслѣдствіе равенства прямыхъ угловъ при точкѣ K), точка B упадетъ въ C (такъ какъ хорда BC дѣлится въ точкѣ K пополамъ), сторона BA пойдетъ по CD (вслѣдствіе равенства угловъ B и C) и, наконецъ, точка A упадетъ въ D (вслѣдствіе равенства сторонъ BA и CD). Изъ этого слѣдуетъ, что $OA=OD$, т.-е. точки A и D одинаково удалены отъ центра; поэтому вершина D должна лежать на окружности, проходящей черезъ A, B и C. Точно такъ же докажемъ, что эта окружность, проходя черезъ три точки, B, C и D, пройдетъ черезъ слѣдующую вершину E и т. д.

2°. Изъ доказаннаго слѣдуетъ, что стороны правильнаго мн.-ка всегда можно разсматривать, какъ равныя хорды одной окружности; но такія хорды одинаково удалены отъ центра; значитъ, всѣ перпендикуляры OM, ON..., опущенные изъ O на стороны многоугольника, равны между собою, и потому окружность, описанная радіусомъ OM изъ центра O, будетъ вписанной въ мн.-къ $ABCDE$.

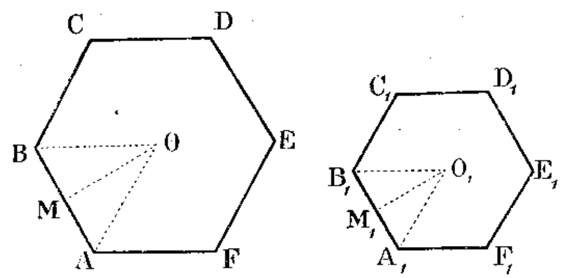
229. Слѣдствіе. Изъ предыдущаго видно, что окружности описанная около правильнаго мн.-ка и вписанная въ него имѣютъ одинъ и тотъ же центръ. Этотъ общій центръ, будучи одинаково удаленъ отъ всѣхъ вершинъ мн.-ка, долженъ лежать на перпендикулярѣ, возстановленномъ изъ средины любой стороны, а будучи одинаково удаленъ отъ сторонъ каждаго угла, онъ долженъ находиться на его биссектриссѣ. Поэтому, чтобы найти центръ описаннаго или вписаннаго круга, достаточно опредѣлить точку пересѣченія двухъ перпендикуляровъ къ срединамъ сторонъ, или двухъ биссектриссъ угловъ, или перпендикуляра съ биссекриссой.

230. Опредѣленія. Общій центръ окружности, описанной около правильнаго мн.-ка или вписанной въ него, наз. *центромъ* этого мн.-ка, радіусъ описанной окружности наз. *радіусомъ* мн.-ка, а радіусъ вписанной окружности — *апоѳемою* его.

Уголъ, составленный двумя радіусами, проведенными къ концамъ какой-нибудь стороны правильнаго мн.-ка, наз. *центральнымъ угломъ*. Такихъ угловъ въ мн.-кѣ столько, сколько сторонъ; всѣ они равны, какъ измѣряющіеся равными дугами.

Такъ какъ сумма всѣхъ центральныхъ угловъ равна $4d$ или $360°$, то каждый изъ нихъ равенъ $^{4d}/_{n}$ или $^{360°}/_{n}$, если n означаетъ число сторонъ мн.-ка.

231. Теорема. *Правильные одноименные многоугольники подобны, и стороны ихъ относятся, какъ радіусы или апоѳемы.*



Черт. 173

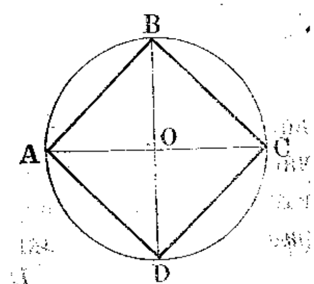
1°. Чтобы доказать подобіе правильныхъ одноименныхъ мн.-ковъ $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, достаточно обнаружить, что у нихъ углы равны и стороны пропорціанальны. И дѣйствительно, углы равны, такъ какъ каждый изъ нихъ содержитъ одно и то же число градусовъ, а именно $\frac{180(n-2)}{n}$ (**85**), если n означаетъ число сторонъ каждаго мн.-ка; стороны же, очевидно, пропорціанальны.

2°. Пусть O и O_1 будутъ центры данныхъ мн.-ковъ, OA и O_1A_1 ихъ радіусы, OM и O_1M_1 — апоѳемы. Тр.-ки OAB и $O_1A_1B_1$ подобны, такъ какъ углы одного соотвѣтственно равны угламъ другого. Изъ подобія ихъ слѣдуетъ:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{OA}{O_1A_1}=\frac{OM}{O_1M_1} \qquad \textbf{(181)}.$$

232. Слѣдствіе. *Периметры правильныхъ многоугольниковъ относятся, какъ радіусы или апоѳемы* (**189**).

233. Задача. *Вписать въ данный кругъ квадратъ и опредѣлить его сторону въ зависимости отъ радіуса.*



Черт. 174

1°. Предположимъ, что AB есть сторона квадрата, вписаннаго въ данный кругъ O. Тогда дуга AB должна равняться $^1/_4$ окружности, и уголъ AOB долженъ быть *прямой*. Поэтому, для построенія вписаннаго квадрата, достаточно провести два перпендикулярныхъ діаметра AC и BD и концы ихъ соединить хордами. Четыреугольнкъ $ABCD$ будетъ правильнымъ, потому что дуги AB, BC, CD и DA равны, какъ соотвѣтствующія равнымъ центральнымъ угламъ.

2°. Изъ прямоугольнаго тр.-ка AOB находамъ:

$$AB^2=AO^2+BO^2, \text{ т.-е. } AB^2=2AO^2$$

откуда

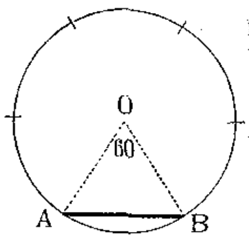
$$AB=AO\sqrt{2}$$

Условимся всегда обозначать черезъ a_n численную величину стороны прав. вписан. мн.-ка, имѣющаго n сторонъ, а черезъ R радіусъ круга; тогда выведенное равенство изобразится такъ:

$$a_4=R\sqrt{2}$$

234. Задача. *Вписать въ данный кругъ правильный шестиугольникъ и опредѣлить его сторону въ зависимости отъ радіуса.*

Предположимъ, что AB есть сторона прав. вписан. шестиугольника. Тогда дуга AB должна быть $^1/_6$ часть окружности, и, слѣд., уголъ AOB долженъ содержать 60°. Такъ какъ тр.-къ AOB равнобедренный $(AO = OB)$, то углы A и B равны и каждый изъ нихъ содержитъ по $^1/_2$ (180° — 60°), т.-е. по 60°. Такимъ образомъ, тр.-къ AOB оказывается равноугольнымъ и, слѣд., равностороннимъ, т.-е. $AB = AO = OB$. Итакъ, *сторона прав. впис. шестиугольника равна радіусу*, что, по принятому нами обозначенію, можно выразить такъ:

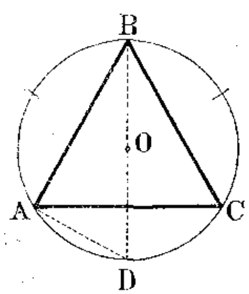


Черт. 175

$$a_6 = R$$

Отсюда возникаетъ весьма простой способъ построенія прав. впис. шестиугольника (или дѣленія окружности на 6 равныхъ частей): давъ циркулю раствореніе, равное радіусу, откладываютъ этимъ раствореніемъ по окружности, одна за другою, равныя дуги и точки дѣленія соединяютъ хордами.

235. Задача. *Вписать въ данный кругъ правильный треугольникъ и опредѣлить его сторону въ зависимости отъ радіуса.*



Черт. 176

1°. Чтобы раздѣлить окружность на 3 равныя части, дѣлятъ ее сначала на 6 равныхъ частей (какъ указано въ предыдущей задачѣ) и затѣмъ соединяютъ по двѣ части въ одну.

2°. Для опредѣленія стороны AB проведемъ діаметръ BD и хорду AD. Тр.-къ ABD прямоугольный при вершинѣ A; поэтому $AB = \sqrt{BD^2 - AD^2}$. Но $BD = 2R$ и $AD = R$ (потому что дуга AD есть $^1/_6$ часть окружности и, слѣд., хорда AD есть сторона прав. впис. шестиугольника); значитъ:

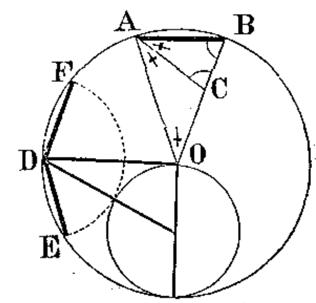
$$a_3 = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = \sqrt{3R^2} = R\sqrt{3}$$

236. Задача. *Вписать въ данный кругъ правильный де-*

сятиугольникъ и опредѣлить его сторону въ зависимости отъ радіуса.

Предварительно докажемъ одно важное свойство прав. десятиугольника. Пусть хорда AB (черт. 177) будетъ сторона такого многоугольника. Тогда уголъ AOB равенъ 36°, а каждый изъ угловъ A и B содержитъ по $^1/_2$ (180° — 36°), т.-е. по 72°. Раздѣлимъ уголъ A пополамъ прямою AC. Каждый изъ угловъ, образовавшихся при точкѣ A, будетъ равенъ 36°; слѣд., $\triangle\ ACO$, имѣя два равные угла, будетъ равнобедренный, т.-е. $AC = CO$. $\triangle\ ABC$ также равнобедренный, потому что $B = 72°$ и $C = 180° - 72° - 36° = 72°$; слѣд., $AB = AC = CO$. По свойству биссектриссы угла тр.-ка (**198**) можемъ написать:

$$AO : AB = OC : CB \qquad [1]$$



Черт. 177

Замѣнивъ AO и AB равными имъ прямыми OB и OC, получимъ:

$$OB : OC = OC : CB \qquad [2]$$

т.-е. радіусъ OB раздѣленъ въ точкѣ C въ среднемъ и крайнемъ отношеніи (**222**), причемъ OC есть его бóльшая часть. Но OC равна сторонѣ прав. впис. десятиугольника; значитъ:

сторона правильнаго вписаннаго десятиугольника равна бóльшей части радіуса, раздѣленнаго въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

Теперь задача рѣшается легко:

1°. Дѣлятъ радіусъ круга въ среднемъ и крайнемъ отношеніи (**222**); затѣмъ, давъ циркулю раствореніе, равное большей части радіуса, откладываютъ имъ по окружности дуги, одна за другою, и точки дѣленія соединяютъ хордами (это построеніе указано на черт. 177; хорды DE и DF суть двѣ смежныя стороны прав. 10-угольника).

2°. Пропорцію [2] можно переписать такъ:

$$R : a_{10} = a_{10} : R - a_{10}$$

откуда

$$a_{10}^2 + Ra_{10} - R^2 = 0$$

Рѣшивъ это квадратное уравненіе, найдемъ:

$$a_{10}=R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

237. Замѣчанія. 1°. Формулы, выведенныя нами въ предыдущихъ задачахъ для a_4, a_6, a_3 и a_{10}, позволяютъ *вычислить радіусъ описаннаго круга по данной сторонѣ прав. многоугольника*. Такъ, изъ выраженія, опредѣляющаго a_{10}, находимъ:

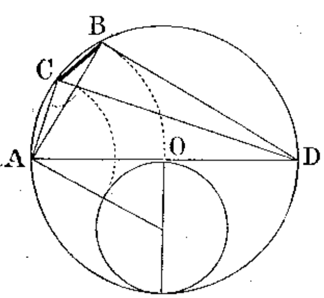
$$R=\frac{2a_{10}}{\sqrt{5}-1}=\frac{2a_{10}(\sqrt{5}+1)}{5-1}=\frac{1}{2}a_{10}\left(\sqrt{5}+1\right)$$

2°. Чтобы вписать въ данный кругъ прав. пятиугольникъ, дѣлятъ окружность на 10 равныхъ частей (какъ указано выше) и точки дѣленія соединяютъ черезъ одну хордами.

238. Задача. *Вписать въ данный кругъ правильный пятнадцатиугольникъ.*

Чтобы найти $^1/_{15}$ окружности, достаточно изъ $^1/_6$ ея части вычесть $^1/_{10}$. Это видно изъ слѣдующаго тождества:

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{5}{30}-\frac{3}{30}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$$



Черт. 178

Поэтому, если дуга AB есть $^1/_6$ окружности, а дуга AC есть $^1/_{10}$ часть ея, то дуга CB будетъ $^1/_{15}$ окружности, а хорда CB — сторона прав. впис. 15-угольника.

Вычисленіе стороны CB можно выполнить, примѣняя теорему Птоломея (215) къ четыреугольнику $ACBD$, въ которомъ $AC=a_{10}$, $CB=a_{15}$, $AD=2R$, $AB=a_6=R$, $CD=\sqrt{4R^2-a^2_{10}}$, $BD=a_3$ (такъ какъ дуга равна $^1/_3$ окружности).

Теорема Птоломея даетъ:

$$AB\,.\,CD=AD\,.\,CB+AC\,.\,BD$$

т.-е.

$$R\sqrt{4R^2-a^2_{10}}=2R\,.\,a_{15}+a_{10}\,a_3$$

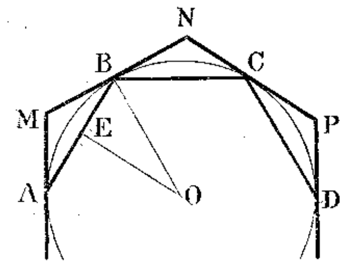
Подставивъ на мѣсто a_{10} и a_3 ихъ выраженія, получимъ послѣ упрощеній:

$$a_{15}=\frac{1}{4}R\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)\right]$$

239. Задача. *По данному радіусу круга и сторонѣ правильнаго вписаннаго многоугольника вычислить сторону правильнаго одноименнаго описаннаго многоугольника.*

Пусть $ABCD\ldots$ будетъ прав. впис. мн.-къ, а $MNP\ldots$ одноименный прав. описанный. Такъ какъ стороны правильныхъ одноименныхъ мн.-ковъ относятся, какъ ихъ радіусы или апоѳемы (231), то:

$$MN:AB=OB:OE$$



Черт. 179

Откуда:

$$MN=\frac{OB\,.\,AB}{OE}=\frac{OB\,.\,AB}{\sqrt{OB^2-BE^2}}$$

Обозначивъ MN, AB и OB соотвѣтственно черезъ b_n, a_n и R и замѣтивъ, что $BE={}^1/_2AB$, будемъ имѣть:

$$b_n=\frac{Ra_n}{\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}}$$

Примѣръ. Вычислимъ сторону прав. описаннаго 10-угольника:

$$b_{10}=\frac{Ra_{10}}{\sqrt{R^2-\frac{a_{10}^2}{4}}}=2R\sqrt{\frac{a^2_{10}}{4R^2-a_{10}^2}}=2R\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16-(\sqrt{5}-1)^2}}=$$

$$=2R\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}}=R2\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}}=2R\sqrt{\frac{10-4\sqrt{5}}{10}}$$

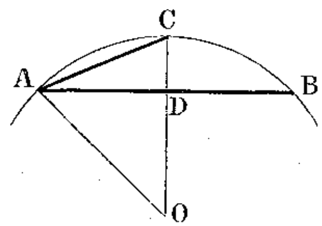
240. Замѣчаніе. Формула, опредѣляющая b_n, позволяетъ вычислить a_n по даннымъ b_n и R. Для этого стоитъ только рѣшить уравненіе, принимая a_n за неизвѣстное:

$$b_n^2\left(R^2-\frac{a_n^2}{4}\right)=R^2a_n^2;\quad b_nR^2=a_n^2\left(R^2+\frac{b_n^2}{4}\right)$$

$$a_n=\frac{Rb_n}{\sqrt{R^2+\frac{b_n^2}{4}}}$$

241. Задача. *Удвоить число сторонъ правильнаго вписаннаго многоугольника.*

Въ этомъ сокращенномъ выраженіи разумѣются собственно двѣ задачи: 1°, по данному правильному впис. мн.-ку *построить* другой мн.-къ, вписанный въ ту же окружность и имѣющій вдвое болѣе сторонъ; 2°, *вычислить сторону* этого мн.-ка по данной сторонѣ перваго мн.-ка и данному радіусу круга.



Черт. 180

1°. Пусть AB есть сторона прав. впис. мн.-ка, имѣющаго n сторонъ, и O центръ круга. Проведемъ $OC \perp AB$ и соединимъ A съ C. Дуга AB дѣлится въ точкѣ C пополамъ; слѣд., хорда AC будетъ сторона прав. впис. мн.-ка, имѣющаго $2n$ сторонъ.

2°. Изъ тр.-ка ACO находимъ (**208**):

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OC \cdot OD$$

т.-е. $a^2_{2n} = R^2 + R^2 - 2R \cdot OD = 2R^2 - 2R \cdot OD$

Изъ прямоугольнаго тр.-ка ADO опредѣлимъ катетъ OD:

$$OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}$$

Слѣд.
$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$$

Такова **формула удвоенія** числа сторонъ прав. впис. многоугольника

Примѣръ. Вычислить сторону прав. впис. 12-угольника:

$$a_{12} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_6^2}{4}}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{\frac{3R^2}{4}}}$$

$$= \sqrt{2R^2 - 2R^2\sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{3}} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

242. На сколько равныхъ частей можно дѣлить окружность помощью циркуля и линейки. Примѣняя указанные въ предыдущихъ задачахъ способы, мы можемъ помощью циркуля и линейки дѣлить окружность на такое число равныхъ частей, которое заключается въ слѣдующихъ рядахъ:

3, 3.2, 3.2.2.... вообще 3.2^n
4, 4.2, 4.2.2.... вообще 2^n
5, 5.2, 5.2.2.... вообще 5.2^n
15, 15.2, 15.2.2.... вообще $3.5.2^n$

Германскій математикъ *Гауссъ* (умершій въ 1855 г.) доказалъ, что посредствомъ циркуля и линейки можно дѣлить окружность на такое число равныхъ частей, которое, будучи *простымъ*, выражается формулою $2^n + 1$. Напр., окружность можно раздѣлить на 17 равныхъ частей, такъ какъ 17 есть число простое вида $2^n + 1$ $(17 = 2^4 + 1)$. Доказательство Гаусса выходитъ изъ предѣловъ элементарной математики.

На всякое иное число равныхъ частей окружность можетъ быть раздѣлена только *приближенно*.

243. Построеніе правильнаго многоугольника по данной сторонѣ. Для различныхъ правильныхъ мн.-ковъ существуютъ различные способы. Но можно указать слѣдующій *общій способъ*. Чертятъ окружность произвольнаго радіуса и вписываютъ въ нее прав. мн.-къ съ такимъ числомъ сторонъ, которое должно быть у искомаго мн.-ка; затѣмъ на данной сторонѣ строятъ мн.-къ, подобный вписанному (**190**).

УПРАЖНЕНІЯ.

241. Составить формулу для стороны правильнаго вписаннаго 24-угольника.

242. Составить формулы для сторонъ правильныхъ вписанныхъ 8-угольника и 16-угольника.

243. Исходя изъ формулы удвоенія, опредѣлить сторону прав. впис. 5-угольника.

244. Составить формулы для сторонъ правильныхъ описанныхъ треугольника и шестиугольника.

245. Доказать, что если въ прав. 5-угольникѣ проведемъ всѣ діагонали, то онѣ своими пересѣченіями образуютъ внутренній прав. 5-угольникъ.

246. Пусть AB, BC и CD будутъ три послѣдовательныя стороны правильнаго мн.-ка, имѣющаго центръ въ O. Если продолжимъ стороны AB и CD до взаимнаго пересѣченія въ точкѣ E, то четыреугольникъ $OAEC$ можетъ быть вписанъ въ окружность.

247. Доказать, что: 1^0, всякій вписанный равносторонній многоугольникъ есть правильный; 2^0, равноугольный вписанный мн-къ есть правильный, когда число сторонъ его нечетное; 3^0, всякій описанный равноугольный мн.-къ есть правильный; 4^0, описанный равносторонній мн.-къ есть правильный, когда число сторонъ его нечетное.

248. Доказать, что двѣ діагонали правильнаго 5-угольника, не исходящія изъ одной вершины, пересѣкаются въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

249. На данной сторонѣ построить прав. 8-угольникъ.

250. На данной сторонѣ построить прав. 10-угольникъ.

251. Срѣзать отъ даннаго квадрата углы такъ, чтобы образовался правильный 8-угольникъ.

252. Въ данный квадратъ вписать равносторонній тр-къ, помѣщая одну изъ его вершинъ или въ вершинѣ квадрата, или съ срединѣ какой либо стороны.

253. Вписать въ равносторонній тр.-къ другой равносторонній треугольникъ, котораго стороны были бы перпендикулярны къ сторонамъ даннаго.

254. Построить углы: въ 18, въ 30, въ 75, въ 72 градуса.

КНИГА IV.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ И ЕЯ ЧАСТЕЙ.

ГЛАВА I.

Основныя свойства предѣловъ.

244. Величины постоянныя и перемѣнныя. Рѣшая какой либо вопросъ, въ который входятъ нѣсколько величинъ, мы иногда предполагаемъ, что нѣкоторыя изъ этихъ величинъ сохраняютъ одно и то же значеніе, тогда какъ другія способны принимать безчисленное множество различныхъ значеній. Первыя величины наз. *постоянными*, вторыя — *перемѣнными*. Такъ, разсматривая зависимость между длиною хорды и ея разстояніемъ отъ центра, мы считаемъ радіусъ круга величи-

ною постоянною, а длину хорды и ея разстояніе отъ центра — величинами перемѣнными.

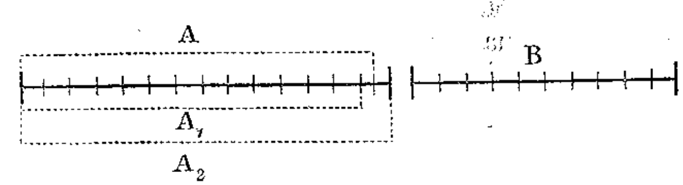
245. Величины, стремящія я къ нулю. Если перемѣнная величина, измѣняясь, дѣлается меньше какого угодно малаго даннаго значенія и при дальнѣйшемъ измѣненіи постоянно остается меньше этого значенія, то говорятъ, что эта перемѣнная величина *стремится къ нулю.*

Напр., если изъ одной точки окружности проведемъ касательную и сѣкущую (см. черт 97) и затѣмъ станемъ вращать сѣкущую вокругъ точки касанія такъ, чтобы вторая точка пересѣченія все ближе и ближе придвигалась къ точкѣ касанія, то при этомъ уголъ, составленный касательною и сѣкущею, будетъ стремиться къ нулю, потому что онъ можетъ сдѣлаться меньше какого угодно малаго угла, напр. меньше угла въ $1'$, и, при дальнѣйшемъ сближеніи точекъ пересѣченія, будетъ постоянно *оставаться* меньше этого угла. Точно также центральный уголъ правильнаго многоугольника стремится къ O, если число сторонъ этого мн.-ка неограниченно возрастаетъ.

246. Величины, стремящіяся къ предѣлу. Иногда случается, что перемѣнная величина, измѣняясь, стремится къ нѣкоторому предѣлу.

Предѣломъ перемѣнной величины наз. такая постоянная величина, къ которой перемѣнная приближается все ближе и ближе такъ, что разность между ними стремится къ нулю.

Приведемъ два примѣра перемѣнныхъ величинъ, стремящихся къ предѣламъ.



Черт. 181

Для перваго примѣра разсмотримъ процессъ измѣренія какой-нибудь длины A, несоизмѣримой съ единицею B. Чтобы измѣрить такую длину (**143**,2^o), мы дѣлимъ B на n равныхъ частей и одну изъ нихъ откладываемъ на A столько разъ, сколько можно. Тогда мы получаемъ соизмѣримую длину A_1, которая меньше A; если же отложимъ $^1/_n$ долю B еще одинъ разъ, то получимъ другую соизмѣримую длину A_2, которая больше A; при этомъ каждая изъ разностей $A - A_1$ и $A_2 - A$ меньше $^1/_n$ доли B. Предположимъ теперь, что число n равныхъ частей, на которое мы дѣлимъ B, увеличивается неограниченно. Тогда длины A_1 и A_2 становятся перемѣнными; каждая изъ нихъ стремится къ предѣлу A, такъ какъ разности между этою постоянною величиною и перемѣнными A_1 и A_2 стремятся къ O, т.-е. дѣлаются и остаются меньше какой угодно малой данной длины.

Изъ этого примѣра мы видимъ, что перемѣнная, приближаясь къ своему предѣлу, можетъ быть или больше его, или меньше; такъ, длина A_1 постоянно остается меньшею, чѣмъ A, а длина A_2, наоборотъ, всегда больше A.

Для второго примѣра возьмемъ величину угла правильнаго многоугольника, имѣющаго n сторонъ. Эта величина равна

$$\frac{2d\ (n-2)}{n} = 2d - \frac{4d}{n}$$

Предположимъ, что число сторонъ многоугольника неограниченно увеличивается; тогда, какъ видно изъ написанной формулы, величина угла мн.-ка будетъ все болѣе и болѣе приближаться къ $2d$, такъ что разность между ними, равная $\frac{4d}{n}$, дѣлается и остается меньше какого угодно малаго угла. Поэтому можно сказать, что уголъ прав. мн.-ка, при неограниченномъ увеличеніи числа его сторонъ, имѣетъ предѣлъ $2d$.

247. Величины, увеличивающіяся безпредѣльно. Если перемѣнная величина, измѣняясь, дѣлается и остается больше какого угодно большого даннаго значенія, то говорятъ, что она увеличивается *безпредѣльно* (или неограниченно).

Напр., сумма угловъ выпуклаго многоугольника, равная $2d\,(n-2)$, при неограниченномъ возрастаніи числа сторонъ, увеличивается безпредѣльно *).

---

*) Величины, увеличивающіяся безпредѣльно, принято въ математикѣ называть *безконечно большими*, а величины, стремящіяся къ нулю, — *безконечно малыми*. Въ этой книгѣ мы не будемъ однако употреблять этихъ терминовъ для избѣжанія нѣкоторой неясности представленія въ умѣ учащагося.

248. Теорема. *Если двѣ перемѣнныя величины, стремящіяся къ предѣламъ, при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ остаются равными между собою, то равны и ихъ предѣлы.*

Пусть a и b будутъ двѣ перемѣнныя величины, а A и B ихъ предѣлы, и положимъ, что при всѣхъ послѣдовательныхъ измѣненіяхъ перемѣнныя a и b всегда равны между собою; требуется доказать, что въ такомъ случаѣ $A = B$. — Предположимъ противное. Пусть, напр., $A > B$. Тогда разность $A - B$ должна равняться какой-нибудь *постоянной* величинѣ, не равной нулю. Обозначимъ эту разность черезъ d. Чтобы опровергнуть наше предположеніе, положимъ, что

$$a = A + x \text{ и } b = B + y$$

гдѣ x и y, означая разности между перемѣнными и ихъ предѣлами, суть величины, *стремящіяся къ* O. Такъ какъ, по условію, $a = b$, то значитъ:

$$A + x = B + y$$

откуда:
$$A - B = y - x$$

т.-е.
$$d = y - x$$

Но это равенство невозможно, такъ какъ разность между величинами y и x, изъ которыхъ каждая стремится къ O, не можетъ равняться постоянной величинѣ d. Невозможность равенства доказываетъ невозможность допущенія, что $A > B$. Такъ же докажемъ, что A не можетъ быть меньше B. Слѣд., $A = B$.

249. Теорема. *Если двѣ перемѣнныя величины, стремящіяся къ предѣламъ, при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ сохраняютъ одно и то же отношеніе, то въ томъ же отношеніи находятся и ихъ предѣлы.*

Пусть a и b будутъ двѣ перемѣнныя величины, а A и B ихъ предѣлы, и положимъ, что при всѣхъ измѣненіяхъ величины a и b постоянно удовлетворяютъ пропорціи:

$$a : b = m : n$$

гдѣ m и n какія-нибудь данныя числа. Требуется доказать, что въ такомъ случаѣ и

$$A:B=m:n$$

Положимъ снова, что $a=A+x$ и $b=B+y$, гдѣ x и y, означая разности между перемѣнными и ихъ предѣлами, должны быть величинами, *стремящимися къ нулю*. Подставивъ въ данную пропорцію на мѣсто a и b суммы $A+x$ и $B+y$, получимъ:

$$A+x:B+y=m:n$$

Откуда:

$$An+nx=Bm+my$$

Такъ какъ величина x стремится къ нулю, то и произведеніе nx стремится къ нулю;*) поэтому сумма $An+nx$ представляетъ собою перемѣнную величину, которой предѣлъ есть постоянная величина An. Подобно этому сумма $Bm+my$ есть перемѣнная величина, имѣющая предѣлъ Bm. Но если равны перемѣнныя, то должны быть равны и ихъ предѣлы; значитъ:

$$An=Bm$$

Откуда:

$$A:B=m:n$$

250. Основное начало способа предѣловъ. Двѣ предыдущія теоремы составляютъ частные случаи слѣдующаго важнаго предложенія:

Если какое либо равенство, содержащее перемѣнныя величины, остается вѣрнымъ при всѣхъ измѣненіяхъ перемѣнныхъ, то оно останется вѣрнымъ и тогда, когда на мѣсто перемѣнныхъ подставимъ ихъ предѣлы.

Это предложеніе служитъ основаніемъ такъ называемому *способу предѣловъ*, которымъ иногда пользуются для доказательства нѣкоторыхъ геометрическихъ истинъ.

251. Способъ предѣловъ. Онъ состоитъ въ слѣдующемъ. Положимъ, что мы желаемъ найти зависимость между нѣкоторыми постоянными величинами A и B, и допустимъ, что

*) Мы принимаемъ безъ доказательства, что если въ произведеніи одинъ сомножитель постоянный, а другой стремится къ O, то и произведеніе стремится къ O.

эту зависимость трудно (или даже невозможно) найти непосредственно. Тогда задаемся вопросомъ: нельзя ли величины A и B разсматривать, какъ *предѣлы* нѣкоторыхъ перемѣнныхъ величинъ a и b, и если можно, то какова зависимость между a и b. Положимъ, оказалось, что эта зависимость выражается равенствомъ:

$$a=3b^2$$

которое остается вѣрнымъ при всѣхъ измѣненіяхъ a и b; въ такомъ случаѣ можемъ принять, что это равенство остается вѣрнымъ и тогда, когда на мѣсто a и b подставимъ ихъ предѣлы, т.-е. что и

$$A=3B^2$$

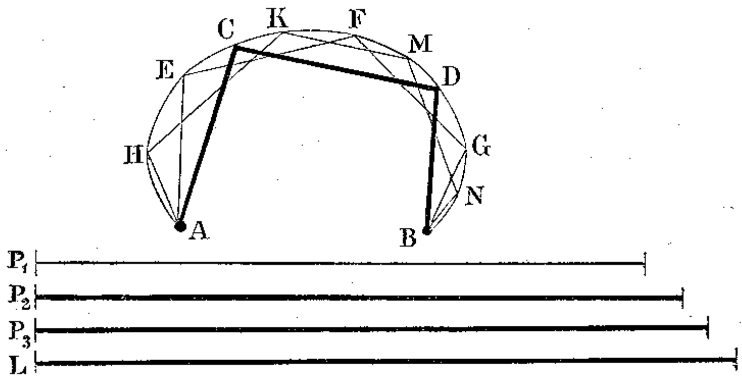
Такимъ образомъ, зависимость между A и B мы найдемъ косвеннымъ путемъ, отыскавъ предварительно зависимость между перемѣнными.

ГЛАВА II.

Вычисленіе длины окружности.

252. Предварительное разъясненіе. Конечную прямую можно сравнивать съ другою конечною прямою, принятою за единицу, вслѣдствіе того, что прямыя линіи при наложеніи *совмѣщаются*. Дѣйствительно, только по этой причинѣ мы можемъ совершенно точно установить, какія прямыя считать равными и неравными, что такое сумма прямыхъ, какая прямая болѣе другой въ 2, 3, 4.... раза, и т. п. Точно также дуги окружностей одинаковаго радіуса можно сравнивать между собою вслѣдствіе того, что такія дуги при наложеніи совмѣщаются. Но извѣстно, что никакая часть окружности или какой бы то ни было другой кривой не можетъ совмѣститься съ прямой (**107**); поэтому нельзя установить путемъ наложенія, какой криволинейный отрѣзокъ должно считать равнымъ данному прямолинейному отрѣзку, а слѣд. и то, какой криволинейный отрѣзокъ больше даннаго прямолинейнаго въ 2, 3, 4.... раза. Такимъ образомъ является необходимость *опредѣлить,* что мы разумѣемъ подъ длиною кривойлиніи, когда сравниваемъ ее съ прямолинейнымъ отрѣзкомъ. Слѣдующее опредѣленіе приводитъ понятіе о длинѣ кривойкъ элементарному понятію о длинѣ прямой.

253. Опредѣленіе длины кривой. Пусть мы имѣемъ какую-нибудь конечную кривую AB. Впишемъ въ нее произ-



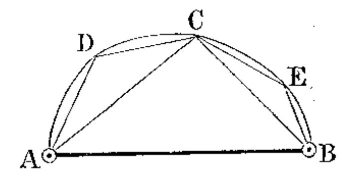
Черт. 182

вольную ломаную $ACDB$, которой концы совпадаютъ съ концами кривой. Найдемъ периметръ этой ломаной, т.-е. сумму всѣхъ ея сторонъ; пусть это будетъ прямая P_1. Впишемъ теперь другую ломаную, напр. $AEFGB$, у которой стороны были бы меньше, чѣмъ у первой ломаной, и слѣд. число сторонъ больше; найдемъ ея периметръ; пусть это будетъ прямая P_2. Впишемъ далѣе третью ломаную, напр. $AHKMNB$, у которой стороны были бы еще меньше, а число сторонъ еще больше, и найдемъ ея периметръ; пусть это будетъ P_3. Вообразимъ теперь, что мы продолжаемъ вписывать въ данную кривую все новыя и новыя ломаныя линіи, у которыхъ стороны неограниченно уменьшаются, и каждый разъ находимъ ихъ периметры. Тогда получимъ безконечный рядъ периметровъ $(P_1, P_2, P_3 \ldots)$. Доказано (**265**), что этотъ рядъ стремится къ нѣкоторому предѣлу (напр. къ длинѣ L), вполнѣ опредѣленному для данной кривой. Этотъ-то предѣлъ и принимаютъ за длину кривой AB.

Такимъ образомъ, *длиною конечной кривой называется предѣлъ, къ которому стремится периметръ вписанной ломаной линіи, когда стороны ея неограниченно уменьшаются.*

254. Слѣдствіе 1. *Отрѣзокъ прямой короче всякой кривой, проведенной между его концами.*

Что отрѣзокъ прямой короче всякой *ломаной,* проведенной между его концами, было доказано ранѣе (**51**). Теперь можемъ доказать ту же истину въ примѣненіи къ кривой. Пусть AB будетъ отрѣзокъ прямой, а ACB какая-нибудь кривая, проведенная между концами A и B. Впишемъ въ кривую произвольную ломаную, напр. ACB, и затѣмъ вообразимъ, что число сторонъ этой ломаной неограниченно *удваивается,* т.-е. что вмѣсто ломаной ACB, состоящей изъ двухъ сторонъ, берется

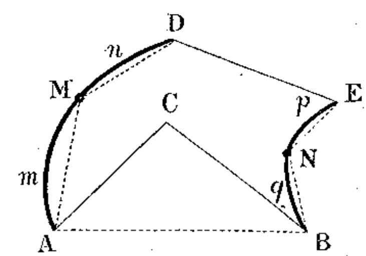


Черт. 183

вписанная ломаная $ADCEB$, состоящая изъ 4-хъ сторонъ, затѣмъ вмѣсто этой берется вписанная ломаная, состоящая изъ 8-ми сторонъ, и т.-д. безъ конца. Отъ этого периметръ ломаной будетъ все *увеличиваться* (напр., $AD+DC+CE+EB$ болѣе $AC+CB$, потому что $AD+DC>AC$ и $CE+$ $+EB>CB$); значитъ, предѣлъ, къ которому онъ стремится, будетъ больше ломаной ACB, а потому, и подавно, больше прямой AB. Но предѣлъ периметра вписанной ломаной есть то, что наз. длиною кривой; слѣд. длина кривой ACB больше прямой AB.

255. Слѣдствіе 2. *Выпуклая линія короче всякой другой линіи, объемлющей ее.*

Для ломаныхъ линій это предложеніе было доказано ранѣе (**52**). Убѣдимся теперь, что во 1° выпуклая ломаная короче объемлющей *кривой,* и во 2° выпуклая *кривая* короче всякой объемлющей (кривой или ломаной).

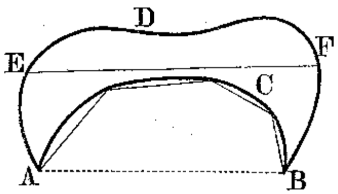


Черт. 184

1°. Пусть ACB есть выпуклая ломаная, а $AmnDEpqB$ какая нибудь объемлющая линія (кривая или составленная изъ частей кривыхъ и прямолинейныхъ). Возьмемъ на ней какія-нибудь точки M и N и проведемъ хорды AM, MD, EN и NB. Тогда получимъ ломаную $AMDENB$, которая по отношенію къ ломаной ACB будетъ объемлющая; слѣд. (**52**):

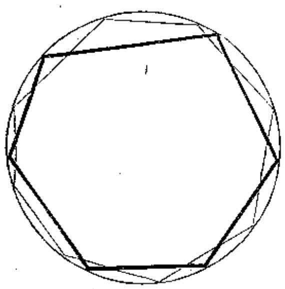
$$AM+MD+DE+EN+NB>AC+CB$$

Такъ какъ дуга AmM больше хорды AM, дуга MnD больше хорды MD и т. д., то длина линіи $AmnDEpqB$ больше периметра ломаной $AMDENB$; слѣд., она и подавно больше ломаной ACB.



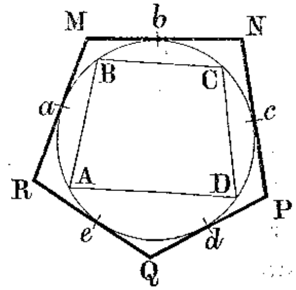
Черт. 185

2°. Пусть ACB есть выпуклая кривая, а ADB какая-нибудь объемлющая линія (кривая или ломаная). Выберемъ на объемлющей линіи такія двѣ точки E и F, чтобы прямая EF не пересѣкалась съ кривою ACB. Всѣ ломаныя линіи, вписанныя въ эту кривую, будутъ тогда меньше объемлющей линіи $AEFB$ (по доказанному въ первой части этого предложенія); вслѣдствіе этого предѣлъ периметровъ вписанныхъ ломаныхъ, т.-е. длина кривой ACB, не можетъ быть больше линіи $AEFB$; но эта линія короче кривой ADB; значитъ, длина кривой ACB меньше длины кривой ADB.


Черт 186

256. Длина окружности. Согласно данному выше опредѣленію, *за длину окружности принимаютъ предѣлъ, къ которому стремится периметръ вписаннаго многоугольника, когда стороны его неограниченно уменьшаются*, и, слѣд., число сторонъ неограниченно увеличивается.

257. Сравненіе длины окружности съ периметрами вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ. Пусть въ данную окружность вписанъ какой-нибудь многоугольникъ $ABCD$ и описанъ какой-нибудь многоугольникъ $MNPQR$. Такъ какъ дуга AB больше хорды AB, дуга BC больше хорды BC и т. д., то *окружность больше периметра всякаго вписаннаго многоугольника*. Съ другой стороны, такъ какъ дуга ab меньше $aM+Mb$, дуга bc меньше $bN+Nc$ и т. д., то *окружность меньше периметра всякаго описаннаго многоугольника*.



Черт. 187

Напр., окружность больше периметра правильнаго вписаннаго шестиугольника и меньше периметра описаннаго квадрата; значитъ, окружность больше 6-ти радіусовъ и меньше 8-ми радіусовъ (такъ какъ сторона прав. впис. шестиугольника равна радіусу, а сторона описаннаго квадрата — діаметру).

Для болѣе точнаго вычисленія длины окружности въ зависимости отъ радіуса докажемъ слѣдующую теорему.

258. Теорема. *Окружности относятся, какъ радіусы или діаметры.*

Пусть R и R_1 будутъ радіусы двухъ окружностей, а C и C_1 ихъ длины; требуется доказать, что

$$C:C_1=R:R_1=2R:2R_1$$

Впишемъ въ данныя окружности какіе-нибудь правильные одноименные многоугольники (напр., шестиугольники) и затѣмъ вообразимъ, что число ихъ сторонъ неограниченно удваивается (т.-е. вмѣсто шестиугольниковъ берутся 12-угольники, затѣмъ 24-угольники и т. д. безъ конца). Обозначимъ перемѣнные периметры этихъ многоугольниковъ черезъ p и p_1. Тогда будемъ имѣть пропорцію (**232**):

$$p:p_1=R:R_1$$

Но если перемѣнныя величины сохраняютъ одно и то же отношеніе, то и предѣлы ихъ находятся въ томъ же отношеніи (**249**); предѣлы же периметровъ p и p_1 будутъ длины окружностей C и C_1; значитъ:

$$C:C_1=R:R_1$$

Умноживъ оба члена второго отношенія на 2, получимъ:

$$C:C_1=2R:2R_1$$

259. Слѣдствія. 1°. Переставивъ въ послѣдней пропорціи средніе члены, будемъ имѣть:

$$C:2R=C_1:2R_1$$

т.-е. *отношеніе окружности къ своему діаметру есть число постоянное для всѣхъ окружностей.*

Это число обозначаютъ греческою буквою π.

2°. Зная радіусъ и число π, мы можемъ вычислить длину окружности изъ равенства:

$$C:2R=\pi; \text{ откуда } C=2\pi R$$

т.-е. *длина окружности равна произведенію ея радіуса на удвоенное отношеніе окружности къ діаметру.*

260. Понятіе о вычисленіи π. Доказано, что отношеніе окружности къ діаметру есть число *несоизмѣримое* *) и потому не можетъ быть выражено точно ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ. Но можно найти приближенное значеніе π съ какою угодно точностью. Укажемъ одинъ изъ способовъ этого вычисленія.

Если радіусъ примемъ за единицу длины, то длина окружности выразится числомъ 2π. Поэтому можно сказать, что π есть длина полуокружности единичнаго радіуса. Чтобы вычислить полуокружность съ нѣкоторымъ приближеніемъ, находятъ полупериметры правильныхъ вписанныхъ мн.-ковъ, которые получаются черезъ удвоеніе какого-нибудь одного изъ нихъ, напр. шестиугольника. Для этого предварительно находятъ длины сторонъ этихъ мн.-ковъ, а затѣмъ полупериметры. Обозначая, по принятому, черезъ a_n сторону прав. впис. мн.-ка, имѣющаго n сторонъ, будемъ имѣть:

$$a_6=R=1$$

*) и даже, болѣе того, число *трансцендентное*, т.-е. такое, которое не можетъ служить корнемъ никакого *алгебраическаго* уравненія. См. брошюру *А. Маркова:* „Доказательство трансцендентности чиселъ e и π.“, С.-Петербургъ, 1883 г.

Примѣняя теперь формулу удвоенія (**241**), т.-е. $a^2_{2n}=2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a^2_n}{4}}$, находимъ:

$$a^2_{12}=2-2\sqrt{1-\frac{1}{4}}=2-\sqrt{3}=0,26795...$$

Послѣ этого, пользуясь тою же формулою, послѣдовательно вычисляемъ:

$$a^2_{24}=2-2\sqrt{1-\frac{a^2_{12}}{4}};\quad a^2_{48}=2-2\sqrt{1-\frac{a^2_{24}}{4}} \text{ и т. д.}$$

Положимъ, что мы прекратили удвоеніе на 96-угольникѣ. Чтобы получить его полупериметръ, надо сторону умножить на 48. Сдѣлавъ всѣ упрощенія и вычисленія, найдемъ (обозначая периметръ буквою p съ соотвѣтствующимъ знакомъ):

$$\frac{1}{2}p_{96}=48\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}=3,1410319...$$

Если полупериметръ 96-угольника примемъ за длину полуокружности, то, конечно, сдѣлаемъ нѣкоторую погрѣшность. Чтобы судить о величинѣ ея, вычислимъ еще полупериметръ правильнаго описаннаго 96-угольника. Для этого воспользуемся формулою, дающей выраженіе для стороны описаннаго мн.-ка по сторонѣ вписаннаго (**239**):

$$b_{96}=\frac{Ra_{96}}{\sqrt{R^2-\frac{a^2_{96}}{4}}}=\frac{a_{96}}{\sqrt{1-\frac{a^2_{96}}{4}}}$$

отсюда:
$$\frac{1}{2}P_{96}=\frac{48a_{96}}{\sqrt{1-\frac{a^2_{96}}{4}}}=\frac{\frac{1}{2}p_{96}}{\sqrt{1-\frac{a^2_{96}}{4}}}$$

гдѣ P_{96} означаетъ периметръ описаннаго 96-угольника. Подставивъ на мѣсто $\frac{1}{2}p_{96}$ и a_{96} найденныя прежде числа и сдѣлавъ вычисленія, найдемъ:

$$\frac{1}{2}P_{96}=3,1427146...$$

Полуокружность болѣе полупериметра вписаннаго, но меньше полупериметра описаннаго 96-угольника (**257**); поэтому она отличается отъ каждаго изъ этихъ полупериметровъ меньше, чѣмъ они разнятся между собою. Сравнивая два числа, найденныя для $^1/_2 p_{96}$ и $^1/_2 P_{96}$, замѣчаемъ, что у нихъ одинаковы цѣлыя, десятыя и сотыя доли; слѣд., разность между полупериметрами меньше $^1/_{100}$. Поэтому если положимъ, что $\pi = 3,14$, то сдѣлаемъ ошибку, меньшую 0,01.

Если подобнымъ образомъ продолжимъ вычисленіе до полученія полупериметра мн.-ка о 6144 сторонахъ, то получимъ число, точное до одной милліонной:

$$\pi = 3,141\ 592$$

Полезно также запомнить нѣсколько цыфръ числа

$$\frac{1}{\pi}\ 0,318\ 309\ 886...$$

часто встрѣчающагося при вычисленіяхъ.

261. Архимедово и Мецiево отношенія. *Архимедъ*, знаменитый Сиракузскій геометръ, жившій въ III вѣкѣ до Р. Хр., нашелъ для π весьма простое число $^{22}/_7$, т.-е. $3^1/_7$. Это число нѣсколько болѣе π и разнится отъ него менѣе, чѣмъ на 2 тысячныхъ.

Адріанъ Мецій, голландскій геометръ XVI столѣтія, далъ для отношенія окружности къ діаметру число $^{355}/_{113}$, точное до одной милліонной *); его легко запомнить по слѣдующему правилу: написавъ по 2 раза первыя три нечетныя цыфры

113 | 355

слѣдуетъ послѣднія три взять числителемъ, а первыя знаменателемъ.

Ученые позднѣйшаго времени, пользуясь упрощенными способами (которые указываются высшей математикой), вычислили π съ точностью, далеко превосходящею всякія практическія требованія (такъ, *Шенксъ* нашелъ 530 десятичныхъ знаковъ числа π**).)

262. Длина дуги въ n^0. Такъ какъ длина всей окружности есть $2\pi R$, то длина дуги въ 1^0 будетъ $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$; слѣд., длина s дуги, содержащей n^0, выразится такъ:

*) Какъ разъясняетъ г. *Энештремъ* (Стокгольмъ) въ № 94 „Вѣстника опытной физики и элементарной математики", число это было найдено отцемъ Адріана Меція, математикомъ *Андріаномъ Антонисомъ*.

**) Для запоминанія довольно длиннаго ряда цифръ, выражающихъ число π, можно пользоваться слѣдующимъ французскимъ двустишіемъ:

Que j'aime à faire apprendre
Un nombre utile aux hommes!

Если выписать въ рядъ числа буквъ, заключающихся въ каждомъ словѣ этой фразы, то получимъ для π число 3,1415926536, вѣрное до одной половины десятибилліонной.

$$s = \frac{\pi R n}{180}$$

Если дуга выражена въ минутахъ (n') или секундахъ (n''), то длина ея опредѣлится формулами:

$$s_1 = \frac{\pi R n'}{180.60} \qquad s_{11} = \frac{\pi R n''}{180.60\ 60}$$

263. Задача. *Вычислить съ точностью до 1 миллиметра радіусъ такой окружности, которой дуга, содержащая $85^0 21' 42''$, равна 0,452 метра.*

Обративъ $85^0 21' 42''$ въ секунды, получимъ число $307302''$. Изъ уравненія:

$$0,452 = \frac{\pi R . 307302}{180.60.60}$$

находимъ: $$R = \frac{0,452.180.60.60}{\pi . 307302} = 0,303 \text{ (метра)}$$

264. При доказательствѣ нижеслѣдующей теоремы мы будемъ основываться на слѣдующихъ почти очевидныхъ истинахъ:

1^0. *Если перемѣнная величина, измѣняясь, все увеличивается, но при этомъ остается меньше нѣкоторой постоянной величины, то она имѣетъ предѣлъ.*

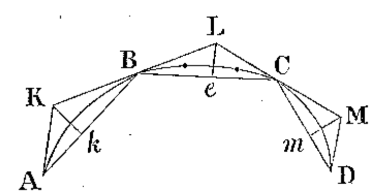
2^0. *Если перемѣнная величина, измѣняясь, все уменьшается, но при этомъ остается больше нѣкоторой постоянной величины, то она имѣетъ предѣлъ.*

3^0. *Если разность двухъ перемѣнныхъ величинъ стремится къ О, и одна изъ этихъ величинъ имѣетъ предѣлъ, то другая имѣетъ тотъ же предѣлъ.*

265. Теорема. *Периметръ ломаной линіи, вписанной въ данную конечную кривую, стремится къ предѣлу и притомъ единственному, когда стороны ломаной стремятся къ О.**)

Если данная кривая не выпукла, мы можемъ разбить ее на части, изъ которыхъ каждая выпукла. Поэтому теорему достаточно доказать только для выпуклой кривой.

Пусть *ABCD* (черт. 188) есть какая-нибудь ломаная, вписанная въ конечную выпуклую кривую *AD*. Проведемъ черезъ всѣ ея вершины касательныя до взаимнаго пересѣченія. Тогда получимъ описанную ломанную *AKLMD*. Условимся называть такую описанную линію *соотвѣтственною* для вписанной ломаной *ABCD*.



Черт. 188

*) Излагаемое доказательство взято (съ нѣкоторыми измѣненіями) изъ книги: „Éléments de géométrie, par *Rouché et Comberousse*", quatrième édition, 1888.

Доказательство наше будетъ состоять изъ трехъ частей.

1⁰. Пусть p означаетъ периметръ какой угодно вписанной, а P периметръ *соотвѣтственной* описанной линіи. Докажемъ, что разность $P—p$ стремится къ O, когда стороны вписанной линіи стремятся къ O. Для этого предварительно найдемъ предѣлъ отношенія $P:p$. Изъ вершинъ описанной ломаной опустимъ перпендикуляры на стороны вписанной (черт. 188). Тогда:

$$P = AK + KB + BL + LC + CM + MD$$
$$p = Ak + kB + Bl + lC + Cm + mD$$

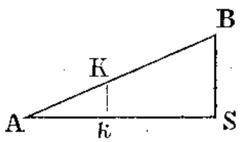
Изъ алгебры извѣстно *), что величина дроби

$$\frac{AK + KB + BL + LC + CM + MD}{Ak + kB + Bl + lC + Cm + mD} = \frac{P}{p} \qquad [1]$$

заключается между меньшею и большею изъ дробей:

$$\frac{AK}{Ak},\ \frac{KB}{kB},\ \frac{BL}{Bl} \dots \frac{MD}{mD} \qquad [2]$$

Найдемъ предѣлъ, къ которому стремятся эти дроби. Когда стороны вписанной ломаной стремятся къ O, стороны соотвѣтственной описанной линіи также, очевидно, стремятся къ O; поэтому каждая изъ дробей ряда [2] представляется въ предѣлѣ подъ видомъ $^0/_0$. Чтобы раскрыть истинный смыслъ этой неопредѣленности, возьмемъ отдѣльно (черт. 189) какой-нибудь изъ прямоугольныхъ тр.-ковъ чертежа 188-го, напр., $\triangle AKk$. Продолживъ сторону Ak, отложимъ на ней какую-нибудь *постоянную* длину AS и построимъ $\triangle ABS$, подобный $\triangle AKk$. Тогда:



Черт. 189

$$AK : Ak = AB : AS$$

Когда стороны вписанной ломаной стремятся къ O, уголъ A, составленный касательною и хордою, стремится къ O (130, 245); слѣд., гипотенуза AB приближается какъ угодно близко къ равенству съ катетомъ AS, и потому отношеніе $AB : AS$, а слѣд. и отношеніе $AK : Ak$, стремится къ 1. Такъ какъ это разсужденіе можно примѣнить ко всякому треугольнику чертежа 188-го, то, значитъ, каждая дробь изъ ряда [2] имѣетъ предѣломъ 1; слѣд., и дробь [1] имѣетъ тотъ же предѣлъ.

Доказавъ это, возьмемъ разность $P - p$ и представимъ ее такъ:

$$P - p = p\left(\frac{P}{p} - 1\right)$$

Отношеніе $^P/_p$ стремится къ 1; слѣд., разность $^P/_p - 1$ стремится къ O. Влѣдствіе этого и произведеніе $p\left(\frac{P}{p} - 1\right)$, въ которомъ множимое величина конечная (такъ какъ периметръ p не можетъ сдѣлаться больше

*) См., напр., „Элементарная алгебра, сост. А. Киселевъ“, второе изданіе, стр. 231.

периметра любой описанной линіи), также стремится къ O; значитъ, то же самое можно сказать о разности $P - p$.

2⁰. Докажемъ теперь, что периметръ вписанной ломаной стремится къ предѣлу при слѣдующемъ *частномъ законѣ* вписыванія. Концы данной кривой соединимъ хордою. Изъ средины этой хорды возставимъ перпендикуляръ до пересѣченія съ кривою. Соединивъ точку пересѣченія съ концами хорды, получимъ первую ломаную о двухъ сторонахъ. Изъ срединъ ея сторонъ возставимъ перпендикуляры до пересѣченія съ кривою. Соединивъ точки пересѣченія съ сосѣдними вершинами первой ломаной, получимъ вторую ломаную съ 4-мя сторонами. Возставивъ изъ срединъ сторонъ этой ломаной перпендикуляры до пересѣченія съ кривою и соединивъ полученныя точки съ сосѣдними вершинами второй ломаной, образуемъ третью ломаную съ 8-ю сторонами. Вообразимъ, что по этому закону мы строимъ неограниченный рядъ вписанныхъ ломаныхъ. Тогда периметръ этихъ линій будетъ *все увеличиваться*, оставаясь однако меньше периметра любой описанной линіи; вслѣдствіе этого онъ стремится къ нѣкоторому предѣлу. Обозначимъ этотъ предѣлъ черезъ L.

Тотъ же предѣлъ имѣетъ и периметръ *соотвѣтственной* описанной ломаной, такъ какъ, по доказанному, разность между этими периметрами стремится къ O.

3⁰. Докажемъ, наконецъ, что къ тому же предѣлу L стремится периметръ вписанной ломаной, которой стороны уменьшаются *по какому угодно закону*.

Пусть p_1 есть перемѣнный периметръ такой вписанной линіи, которой стороны стремятся къ O по произвольному закону, а p периметръ вписанной линіи, образуемой по указанному выше частному закону; положимъ еще, что P_1 и P будутъ периметры соотвѣтственныхъ описанныхъ линій. По доказанному въ части 1⁰ этого изложенія разности:

$$P_1 - p_1 \text{ и } P - p$$

стремятся къ O. Поэтому и сумма ихъ должна стремиться къ O. Но эту сумму можно представить такъ:

$$(P_1 - p) + (P - p_1)$$

Такъ какъ $P_1 > p$ и $P > p_1$ (**53**), то обѣ разности, стоящія внутри скобокъ, положительны. Но сумма положительныхъ слагаемыхъ будетъ стремиться къ O только тогда, когда *каждое слагаемое* стремится къ O; слѣд., разности $P_1 - p$ и $P - p_1$ стремятся къ O. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\text{пред. } P_1 = \text{пред. } p \text{ и пред. } P = \text{пред. } p_1$$

Но $\qquad \text{пред. } p = \text{пред. } P = L$

Слѣд. $\qquad \text{пред. } p_1 = \text{пред. } P_1 = \text{пред. } p = \text{пред. } P = L$

т.-е. этотъ предѣлъ существуетъ и есть единственный для данной конечной кривой.

УПРАЖНЕНІЯ.

255. Доказать, что въ двухъ кругахъ отношеніе центральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ дугамъ, имѣющимъ одинаковую длину, равно обратному отношенію радіусовъ.

256. Какъ велика будетъ ошибка, если вмѣсто полуокружности возьмемъ сумму стороны правильнаго вписаннаго треугольника и стороны вписаннаго квадрата?

257. На окружности взята точка A и черезъ нее проведены: діаметръ AB, сторона правильною вписаннаго 6-угольника AC и касательная MN. Изъ центра O опущенъ на AC перпендикуляръ и продолженъ до пересѣченія съ касательнаго въ точкѣ D. Отъ этой точки отложена по касательной (черезъ точку A) прямая DE, равная 3 радіусамъ. Точка E соединена съ концомъ діаметра B. Опредѣлить, какъ велика погрѣшность, если прямую BE возьмемъ за длину полуокружности *).

258. На діаметрѣ данной полуокружности построены двѣ равныя полуокружности и въ пространство, заключенное между тремя полуокружностями, вписанъ кругъ. Доказать, что діаметръ этого круга относится къ діаметру равныхъ полуокружностей, какъ 2:3.

259. Вычислить въ градусахъ, минутахъ и секундахъ дугу, равную радіусу.

260. Вычислить длину одного градуса земного экватора, принимая радіусъ земли въ 859 геогр. миль.

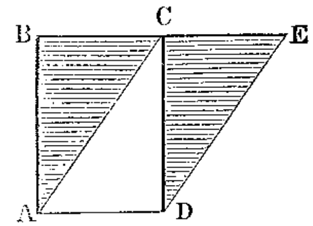
КНИГА V.
ИЗМѢРЕНІЕ ПЛОЩАДЕЙ.

ГЛАВА I.
Площади многоугольниковъ.

266. Опредѣленія. Площадью наз. величина части плоскости, ограниченной со всѣхъ сторонъ линіями.

*) Доказано, что посредствомъ циркуля и линейки нѣтъ возможности построить такую конечную прямую, которая въ точности равнялась бы длинѣ окружности (задача *о спрямленіи окружности*). Однако есть нѣсколько способовъ для приближеннаго спрямленія. Въ задачахъ 256 и 257 указаны два изъ этихъ способовъ. Послѣдній изъ нихъ, принадлежащій польскому іезуиту *Коханскому* (1683), замѣчателенъ тѣмъ, что можетъ быть выполненъ однимъ раствореніемъ циркуля.

Равныя фигуры, т.-е. такія, которыя совмѣщаются при наложеніи, имѣютъ и равныя площади. Но и у неравныхъ фигуръ площади могутъ быть равны. Напр., если прямоугольникъ $ABCD$ раздѣлимъ пополамъ діагональю AC и перенесемъ тр.-къ ABC въ положеніе DCE, то получимъ параллелограммъ $ACED$, котораго площадь, очевидно, равна площади прямоугольника.



Черт. 191

Двѣ фигуры, имѣющія равныя площади, наз. *равновеликими*.

267. Единица площади. За единицу площадей берутъ площадь такого квадрата, у котораго сторона равна линейной единицѣ. Такъ, употребительны квадр. футъ, квадр. метръ и т. п.

Измѣреніе площади только въ рѣдкихъ случаяхъ можетъ быть выполнено непосредственнымъ наложеніемъ квадратной единицы. Большею частію площади приходится измѣрять косвенно, посредствомъ измѣренія нѣкоторыхъ линій фигуры.

268. Основаніе и высота. Условимся одну изъ сторонъ треугольника или параллелограмма называть *основаніемъ* этихъ фигуръ, а перпендикуляръ, опущенный на эту сторону изъ вершины тр.-ка или изъ какой-нибудь точки противоположной стороны параллелограмма будемъ называть *высотою*.

Въ прямоугольникѣ за высоту можно взять сторону, перпендикулярную къ той, которая принята за основаніе.

Въ трапеціи основаніями называютъ обѣ параллельныя стороны, а высотою общій перпендикуляръ между ними.

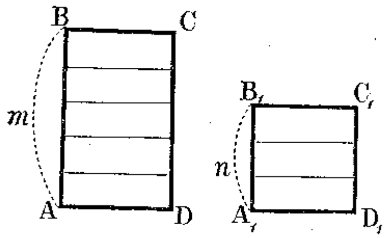
Основаніе и высота прямоугольника наз. его *измѣреніями*.

269. Лемма 1°. *Площади двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія, относятся, какъ ихъ высоты.*

Пусть AC и A_1C_1 (черт. 192) будутъ два прямоугольника, у которыхъ основанія AD и A_1D_1 равны; требуется доказать, что площади такихъ прямоугольниковъ относятся, какъ высоты AB и A_1B_1.

При доказательствѣ разсмотримъ особо два случая.

1°. *Высоты соизмѣримы.* Найдя общую мѣру высотъ, отложимъ ее на каждой изъ нихъ столько разъ, сколько можно. Пусть общая мѣра содержится m разъ въ AB и n разъ въ A_1B_1. Проведемъ черезъ точки дѣленія прямыя, параллельныя основаніямъ. Тогда площадь $ABCD$ раздѣлится на m равныхъ частей, а площ. $A_1B_1C_1D_1$ на n такихъ же частей. Поэтому



Черт. 192

$$\frac{\text{площ. } ABCD}{\text{площ. } A_1B_1C_1D_1} = \frac{m}{n} \quad \text{и} \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{m}{n}$$

Слѣд.:
$$\frac{\text{площ. } ABCD}{\text{площ. } A_1B_1C_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$$

2°. *Высоты несоизмѣримы.* Раздѣлимъ A_1B_1 на n равныхъ частей и одну часть отложимъ на AB столько разъ, сколько можно. Пусть она содержится въ AB болѣе m, но менѣе $m+1$ разъ. Черезъ точки дѣленія проведемъ прямыя, параллельныя основаніямъ. Тогда площадь $A_1B_1C_1D_1$ раздѣлится на n такихъ равныхъ частей, какихъ въ площ. $ABCD$ содержится болѣе m, но менѣе $m+1$ разъ. Поэтому:

$$\text{прибл. отн. } \frac{\text{площ. } ABCD}{\text{площ. } A_1B_1C_1D_1} = \frac{m}{n} \left(\text{до } \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{и прибл. отн. } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{m}{n} \left(\text{до } \frac{1}{n}\right)$$

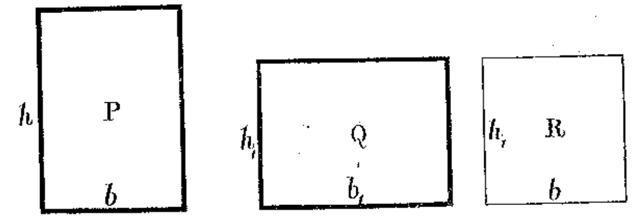
Такимъ образомъ, приближенныя отношенія, вычисленныя съ произвольною, но одинаковою, точностью, оказываются равными; а въ этомъ и состоитъ равенство несоизмѣримыхъ отношеній (**144**).

270. Слѣдствіе. *Площади двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя высоты, относятся, какъ ихъ основанія,* потому что въ прямоугольникахъ основанія могутъ быть приняты за высоты, а высоты за основанія.

271. Лемма 2°. *Площади двухъ прямоугольниковъ относятся, какъ произведенія основаній на высоты.*

Пусть P и Q будутъ два прямоугольника, b и b_1 — ихъ основанія, h и h_1 — высоты; требуется доказать, что

$$P : Q = bh : b_1h_1$$



Черт. 193.

Возьмемъ вспомогательный прямоугольникъ R, у котораго основаніе равно b, а высота h_1. Тогда, по предыдущей леммѣ, будемъ имѣть:

$$\frac{P}{R} = \frac{h}{h_1} \quad \text{и} \quad \frac{R}{Q} = \frac{b}{b_1}$$

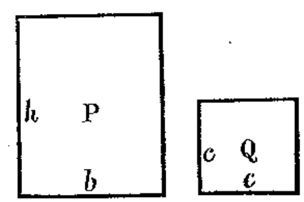
Перемноживъ эти равенства, получимъ (по сокращеніи на R):

$$\frac{P}{R} = \frac{bh}{b_1h_1}$$

272. Теорема. *Число, выражающее площадь прямоугольника въ квадратныхъ единицахъ, равно произведенію чиселъ, выражающихъ основаніе и высоту его въ соотвѣтствующихъ линейныхъ единицахъ.*

Это сокращенно выражаютъ такъ: *площадь прямоугольника равна произведенію основанія на высоту.*

Доказываемую теорему можно разсматривать, какъ слѣдствіе предыдущей леммы. Дѣйствительно, если P есть данный прямоугольникъ, а Q квадратная единица, то, называя основаніе и высоту перваго b и h, а основаніе и высоту второго c, будемъ имѣть:



Черт. 194

$$\frac{P}{Q} = \frac{bh}{cc}$$

что можетъ быть написано такъ:

$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{c} \cdot \frac{h}{c}$$

Это равенство и есть то, которое требовалось доказать, такъ какъ отношеніе $\frac{P}{Q}$ есть число, выражающее площадь прямоугольника въ квадратныхъ единицахъ, а отношенія $\frac{b}{c}$ и $\frac{h}{c}$ суть числа, выражающія его основаніе и высоту въ соотвѣтствующихъ линейныхъ единицахъ.

Полагая $Q=1$ и $c=1$, получимъ:

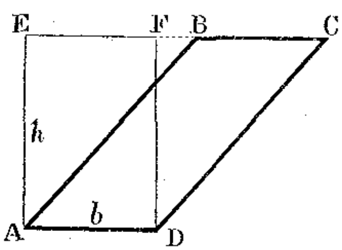
$$P=bh$$

гдѣ P, b и h суть *числа,* выражающія площадь, основаніе и высоту прямоугольника въ соотвѣтствующихъ единицахъ.

273. Слѣдствіе. *Площадь квадрата равна квадрату его стороны.*

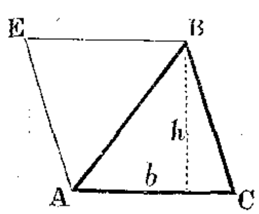
274. Въ послѣдующихъ теоремахъ мы будемъ сокращенно говорить: „площадь равна произведенію такихъ-то линій", разумѣя подъ этимъ, что *число,* выражающее площадь въ квадр. единицахъ, равно произведенію *чиселъ,* выражающихъ такія-то линіи въ соотвѣтствующихъ линейныхъ единицахъ.

275. Теорема. *Площадь параллелограмма (ABCD,* черт. 195) *равна произведенію основанія на высоту.*



Черт. 195

На основаніи AD построимъ прямоугольникъ $AEFD$, у котораго высота такая же, какъ и у параллелограмма. Докажемъ, что $ABCD$ равновеликъ $AEFD$. Параллелограммъ $ABCD$ получится, если изъ четыреугольника $AECD$ отдѣлимъ тр.-къ AEB; прямоугольникъ $AEFD$ получится, если изъ того же четыреугольника $AECD$ отдѣлимъ тр.-къ DFC. Отдѣляемые тр.-ки равны, потому что они прямоугольные и $AE=DF$, $AB=CD$ (какъ противоположныя стороны параллелограммовъ). Изъ этого слѣдуетъ, что $ABCD$ равновеликъ $AEFD$. Но площадь $AEFD$ равна bh; слѣд., и площадь $ABCD$ равна bh.



Черт. 196

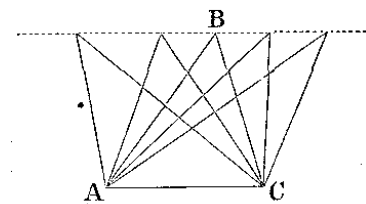
276. Теорема. *Площадь треугольника (ABC,* черт. 196) *равна половинѣ произведенія основанія на высоту.*

Проведемъ $BE \parallel AC$ и $AE \parallel BC$. Тогда получимъ параллелограмъ $AEBC$, котораго площадь, по доказанному, равна произведенію bh. Но площадь ABC составляетъ половину площади $AEBC$; слѣд.

$$\text{площ. } ABC=\frac{1}{2}\,bh$$

277. Слѣдствія. 1°. *Треугольники съ равными основаніями и равными высотами равновелики.*

Если, напр., вершину B тр.-ка ABC будемъ перемѣщать по прямой, параллельной основанію AC, а основаніе оставимъ то же самое, то площадь тр.-ка не измѣнится.



Черт. 197

2°. *Площадь прямоугольнаго треугольника равна половинѣ произведенія его катетовъ,* потому что одинъ катетъ можно взять за основаніе, а другой за высоту.

3°. *Площади треугольниковъ относятся, какъ произведенія основаній на высоты.*

278. Теорема. *Площадь S треугольника въ зависимости отъ его сторонъ a, b и c выражается формулой:*

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

гдѣ p есть полупериметръ треугольника, т.-е.

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

Пусть высота тр.-ка ABC, опущенная на сторону a, есть h_a. Тогда:

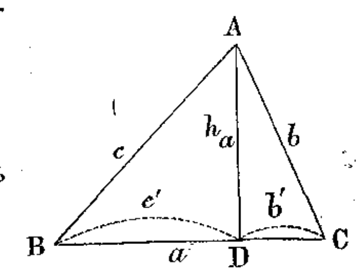
$$S=\frac{1}{2}\,ah_a$$

Чтобы найти высоту h_a, возьмемъ уравненіе (**208**):

$$b^2=a^2+c^2-2ac'$$

и опредѣлимъ изъ него отрѣзокъ c':

$$c'=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$$



Черт. 198

Теперь изъ треугольника ABD находимъ:

$$h_a=\sqrt{c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2}=\frac{1}{2a}\sqrt{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}$$

Преобразуемъ подкоренную величину такъ:

$$\begin{aligned}(2ac)^2-(a^2+c^2-b^2)^2&=(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)\\&=[(a^2+c^2+2ac)-b^2][b^2-(a^2+c^2-2ac)]\\&=[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]\\&=(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)\end{aligned}$$

Если положимъ, что $a+b+c=2p$, то

$$a+c-b=(a+b+c)-2b=2p-2b=2(p-b)$$

Подобно этому: $b+a-c=2(p-c)$

$$b+c-a=2(p-a)$$

Теперь подкоренная величина представится такъ:

$$16p(p-a)(p-b)(p-c)$$

Слѣд. $$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

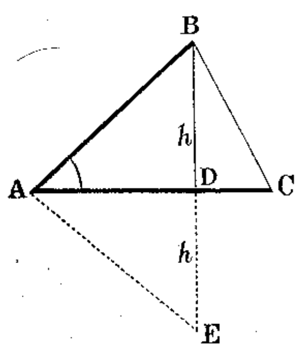
и $$S=\frac{1}{2}ah_a=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Частный случай. Площадь *равносторонняго* треугольника со стороною a выразится формулой:

$$S=\sqrt{\frac{3}{2}a\left(\frac{3}{2}a-a\right)^3}=\sqrt{\frac{3}{2}a\left(\frac{1}{2}a\right)^3}=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$$

279. Задача. *Найти площадь треугольника ABC по двумъ сторонамъ AB и AC и углу A между ними.*

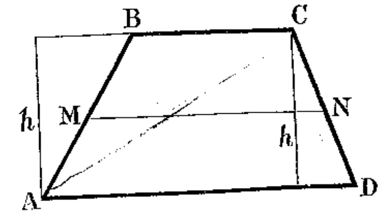
Геометрически эта задача рѣшается только для нѣкоторыхъ частныхъ значеній угла A. Положимъ, напр., что $A=18^0$. Тогда можно найти h въ зависимости отъ стороны AB такимъ образомъ. Продолживъ BD на разстояніе $DE=BD$, соединимъ E съ A. Тогда въ равнобедренномъ тр.-кѣ ABE уголъ BAE будетъ равенъ 36^0. Изъ этого заключаемъ, что BE, т.-е. двойная высота, есть сторона правильнаго 10-угольника, вписаннаго въ кругъ, котораго радіусъ есть AB. Поэтому DE найдется по формулѣ, опредѣляющей сторону прав. вписан. 10-угольника (236). Опредѣливъ высоту, найдемъ затѣмъ площадь тр.-ка по формулѣ $S=\frac{1}{2}bh$.



Черт. 199.

280. Теорема. *Площадь трапеціи равна произведенію полусуммы основаній на высоту.*

Проведя въ трапеціи $ABCD$ діагональ AC, мы можемъ разсматривать ея площадь, какъ сумму площадей двухъ тр.-ковъ ACD и ABC. Поэтому



Черт. 200

площ. $ABCD=\frac{1}{2}AD.h+$

$$+\frac{1}{2}BC.h=\frac{1}{2}(AD+BC)h$$

281. Слѣдствіе. Проведя въ трапеціи среднюю линію MN, будемъ имѣть (**103**):

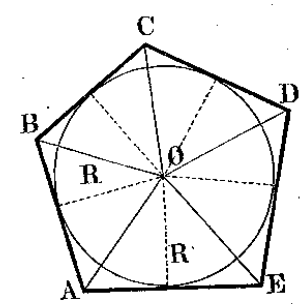
$$MN=\frac{1}{2}(AD+BC)$$

Поэтому: площ. $ABCD=MN.h$

т.-е. *площадь трапеціи равна произведенію средней линіи на высоту.*

282. Теорема. *Площадь описаннаго многоугольника равна произведенію периметра на половину апоѳему.*

Соединивъ центръ O со всѣми вершинами описаннаго многоугольника, мы раздѣлимъ его на треугольники, въ которыхъ за основанія можно брать стороны многоугольника, а за высоту — радіусъ круга. Обозначивъ этотъ радіусъ черезъ R, будемъ имѣть:



Черт. 201

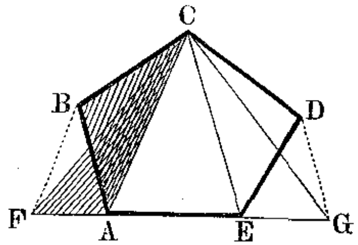
площ. $ABO=AB.\frac{1}{2}R$;

площ. $AOE=AE.\frac{1}{2}R$ и т. д.

Слѣд. площ. $ABCDE=(AB+BC+CD+DE+EF).\frac{1}{2}R$.

283. Слѣдствіе. *Площадь правильнаго многоугольника равна произведенію периметра на половину апоѳемы,* потому что всякій прав. многоугольникъ можно разсматривать, какъ описанный около круга, у котораго радіусъ есть апоѳема.

284. Задача. *Превратить многоугольникъ $ABCDE$ въ равновеликій треугольникъ.*



Черт. 202

Черезъ вершину B проведенъ $BF \parallel AC$ до пересѣченія съ продолженіемъ EA. Точку F соединимъ съ C. Тр.-ки CBA и CFA равновелики, такъ какъ у нихъ общее основаніе AC, а вершины B и F лежатъ на прямой, параллельной основанію (**277**). Если отъ даннаго многоугольника отдѣлимъ тр.-къ CBA и вмѣсто него приложимъ тр.-къ CFA, то величина площади не измѣнится; слѣд., данный пятиугольникъ равновеликъ четыреугольнику $FCDE$. Такимъ же пріемомъ можно превратить этотъ четыреугольникъ въ равновеликій треугольникъ (напр. FCG).

285. Задача. *Превратить многоугольникъ въ равновеликій квадратъ.*

Сначала превращаютъ многоугольникъ въ равновеликій треугольникъ, а затѣмъ этотъ треугольникъ въ квадратъ. Пусть основаніе и высота треугольника будутъ b и h, а сторона искомаго квадрата x. Тогда площадь перваго равна $^1/_2 bh$, а второго x^2; слѣд.

$$\frac{1}{2} bh = x^2; \text{ откуда } \frac{1}{2} b : x = x : h$$

т.-е. x есть средняя пропорціанальная между $^1/_2 b$ и h. Такимъ образомъ, сторону квадрата можно построить способомъ, указаннымъ раньше (**203**) для нахожденія средней пропорціанальной.

Замѣтимъ, что предварительное превращеніе даннаго многоугольника въ треугольникъ не всегда необходимо. Напр., если рѣчь идетъ о превращеніи въ квадратъ данной трапеціи, то достаточно найти среднюю пропорціанальную между высотою трапеціи и ея среднею линіею и на полученной прямой построить квадратъ.

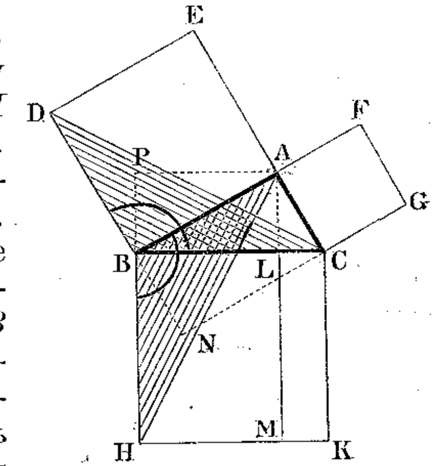
ГЛАВА II.

Теорема Пиѳагора и основанныя на ней задачи.

286. Теорема. *Сумма квадратовъ, построенныхъ на катетахъ прямоугольнаго треугольника, равновелика квадрату, построенному на гипотенузѣ.*

Это предложеніе, извѣстное подъ названіемъ **теоремы Пиѳагора** (греческаго философа, жившаго въ VI вѣкѣ до Р. Хр.), имѣетъ многочисленныя доказательства. Приведемъ простѣйшія изъ нихъ.

Первое доказательство. Пусть ABC будетъ прямоугольный треугольникъ, а $BDEA$, $AFGC$ и $BCKH$ квадраты, построенные на его катетахъ и гипотенузѣ; требуется доказать, что сумма двухъ первыхъ квадратовъ равновелика третьему квадрату.—Проведемъ $AM \perp BC$. Тогда квадратъ $BCKH$ раздѣлится на два прямоугольника. Докажемъ, что прям. $BLMH$ равновеликъ квадрату $BDEA$, а прямоуг. $LCKM$ равновеликъ квадрату $AFGC$. Проведемъ вспомогательныя прямыя DC и AH. Тр.-къ DCB, имѣющій основаніе BD, общее съ квадратомъ $BDEA$, и высоту CN, равную высотѣ AB этого квадрата, равновеликъ половинѣ его. Тр.-къ ABH, имѣющій основаніе BH, общее съ прямоугольникомъ $BLMH$, и высоту AP, равную высотѣ BL этого прямоугольника, равновеликъ половинѣ его. Сравнивая эти два треугольника между собою, находимъ, что у нихъ $BD = BA$ и $BC = BH$ (какъ стороны квадрата); сверхъ того $\angle DBC = \angle ABH$, такъ какъ каждый изъ этихъ угловъ состоитъ изъ общей части ABC и прямого угла. Значитъ, тр.-ки BDC и ABH равны. Отсюда слѣдуетъ, что прямоугольникъ $BLMH$ равновеликъ квадрату $BDEA$.



Черт. 204

Соединивъ G съ B и A съ K, мы совершенно такъ же докажемъ, что прямоугольникъ $LCKM$ равновеликъ квадрату $AFGC$. Отсюда слѣдуетъ, что $BCKH$ равновеликъ суммѣ $BDEA$ и $AFGC$.

Второе доказательство. Пусть a, b и c будутъ числа, выражающія гипотенузу и катеты прямоугольнаго треугольника въ одной и той же линейной единицѣ. Тогда, какъ мы видѣли раньше (**204**):

$$a^2 = b^2 + c^2$$

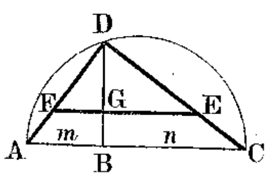
Но a^2, b^2 и c^2 суть числа, измѣряющія площади квадратовъ, которыхъ стороны суть a, b и c; слѣд., написанное равенство выражаетъ, что квадратъ, построенный на гипотенузѣ, равновеликъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ.

287. Задачи. *Построить квадратъ, равновеликій: 1°, суммѣ, 2°, разности двухъ данныхъ квадратовъ.*

1°. Строимъ прямоугольный треугольникъ, у котораго катетами были бы стороны данныхъ квадратовъ. Квадратъ, построенный на гипотенузѣ этого треугольника, будетъ равновеликъ *суммѣ* данныхъ квадратовъ.

2°. Строимъ прямоуг. треугольникъ, у котораго гипотенузой была бы сторона большаго изъ данныхъ квадратовъ, а катетомъ сторона меньшаго квадрата. Квадратъ, построенный на другомъ катетѣ этого треугольника, будетъ равновеликъ *разности* данныхъ квадратовъ.

288. Задача. *Построить квадратъ, котораго площадь относилась бы къ площади даннаго квадрата, какъ $m:n$.*



Черт. 205

На неопредѣленной прямой откладываемъ $AB = m$ и $BC = n$ и на AC, какъ на діаметрѣ, описываемъ полуокружность. Изъ точки B возстановляемъ перпендикуляръ BD до пересѣченія съ окружностью. Соединивъ D съ A и C, получимъ прямоугольный тр.-къ, у котораго (**206**):

$$AD^2 : DC^2 = AB : BC = m : n$$

Отложимъ теперь на одномъ изъ катетовъ этого треугольника, напр. на DC, отрѣзокъ DE, равный сторонѣ даннаго квадрата, и проведемъ $EF \parallel CA$. Прямая DF будетъ стороною искомаго квадрата потому что

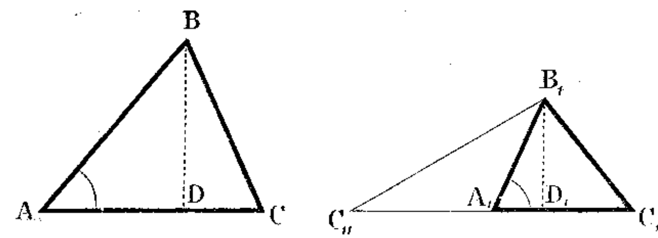
$$DF : DE = AD : DC$$

и слѣд. $$DF^2 : DE^2 = AD^2 : DC^2 = m : n$$

ГЛАВА III.

Отношеніе площадей подобныхъ фигуръ.

289. Теорема. *Площади двухъ треугольниковъ, содержащихъ по равному углу, относятся, какъ произведенія сторонъ, заключающихъ эти углы.*



Черт. 206

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ будутъ два тр.-ка, у которыхъ $A = A_1$. Проведя высоты BD и B_1D_1, будемъ имѣть:

$$\frac{\text{площ. } ABC}{\text{площ. } A_1B_1C_1} = \frac{AC \cdot BD}{A_1C_1 \cdot B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{BD}{B_1D_1}$$

Тр.-ки ABD и $A_1B_1D_1$ подобны ($A = A_1$ и $D = D_1$); поэтому отношеніе $BD : B_1D_1$ равно отношенію $AB : A_1B_1$; замѣнивъ первое вторымъ, получимъ:

$$\frac{\text{площ. } ABC}{\text{площ. } A_1B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC \cdot AB}{A_1C_1 \cdot A_1B_1}$$

290. Замѣчаніе. Предлагаемъ самимъ учащимся доказать, что если у двухъ треугольниковъ ABC и $A_1B_1C_{11}$ (черт. 206) углы A и A_1 *составляютъ въ суммѣ* $2d$, то площади такихъ тр.-ковъ также относятся, какъ произведенія сторонъ, заключающихъ углы A и A_1.

291. *Площади подобныхъ треугольниковъ или многоугольниковъ относятся, какъ квадраты сходственныхъ сторонъ.*

1°. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 206) будутъ два подобные треугольника, у которыхъ $A=A_1$, $B=B_1$ и $C=C_1$. Примѣняя къ нимъ предыдущую теорему, получимъ:

$$\frac{\text{площ. } ABC}{\text{площ. } A_1B_1C_1}=\frac{AB\,.\,AC}{A_1B_1\,.\,A_1C_1}=\frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{AC}{A_1C_1} \qquad [1]$$

Но изъ подобія треугольниковъ слѣдуетъ:

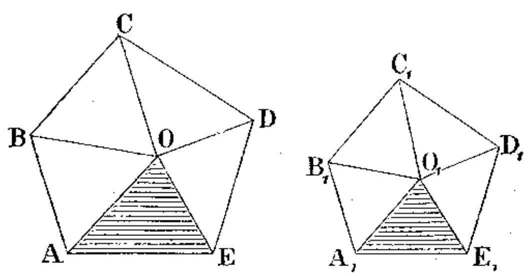
$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1} \qquad [2]$$

Поэтому въ равенствѣ [1] мы можемъ каждое изъ отношеній $\frac{AB}{A_1B_1}$ и $\frac{AC}{A_1C_1}$ замѣнить любымъ отношеніемъ ряда [2]. Слѣд.:

$$\frac{\text{площ. } ABC}{\text{площ. } A_1B_1C_1}=\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2=\left(\frac{AC}{A_1C_1}\right)^2=\left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2$$

$$=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{AC^2}{A_1C_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2}$$

2°. Пусть $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ будутъ два подобные многоугольника. Ихъ можно, какъ мы видѣли (**186**), разложить на одинаковое число подобныхъ и одинаково расположенныхъ тр.-ковъ. Пусть эти тр.-ки будутъ: ABO и $A_1B_1O_1$, AOE и $A_1O_1E_1$ и т. д. Согласно доказанному въ первой части этой теоремы, мы будемъ имѣть:



Черт. 207

$$\frac{\text{площ. } AOB}{\text{площ. } A_1O\,B_1}=\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2;\quad \frac{\text{площ. } BOC}{\text{площ. } B_1O_1C_1}=\left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 \text{ и т. д.}$$

Но изъ подобія многоугольниковъ слѣдуетъ:

$$\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2=\left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2=\left(\frac{CD}{C_1D_1}\right)^2=\ldots.$$

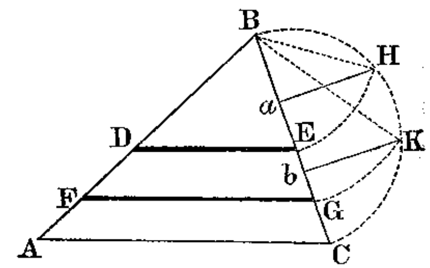
Значитъ: $$\frac{\text{площ. } AOB}{\text{площ. } A_1O_1B_1}=\frac{\text{площ. } BOC}{\text{площ. } B_1O_1C_1}=\frac{\text{площ. } COD}{\text{площ. } C_1O_1D_1}=\ldots$$

Откуда: $$\frac{\text{пл. } AOB+\text{пл. } BOC+\text{пл. } COD+..}{\text{пл. } A_1O_1B_1+\text{пл. } B_1O_1C_1+\text{пл. } C_1O_1D_1+..}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}$$

292. Слѣдствіе. *Площади правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ относятся, какъ квадраты сторонъ, или квадраты радіусовъ, или квадраты апоѳемъ* (**231**).

293. Задача. *Раздѣлить данный треугольникъ на m равновеликихъ частей прямыми, параллельными одной его сторонъ.*

Пусть, напр., требуется раздѣлить тр.-къ ABC на 3 равновеликія части прямыми, параллельными основанію AC. Предположимъ, что задача рѣшена, и искомыя прямыя будутъ DE и FG. Очевидно, что если мы найдемъ отрѣзки BE и BG, то затѣмъ опредѣлятся и прямыя DE и FG. Тр.-ки BDE, BFG и BAC подобны; поэтому:



Черт. 208

$$\frac{\text{площ. } BDE}{\text{площ. } BAC}=\frac{BE^2}{BC^2} \quad\text{и}\quad \frac{\text{площ. } BFG}{\text{площ. } BAC}=\frac{BG^2}{BC^2}$$

Но изъ требованій задачи видно, что:

$$\frac{\text{площ. } BDE}{\text{площ. } BAC}=\frac{1}{3} \quad\text{и}\quad \frac{\text{площ. } BFG}{\text{площ. } BAC}=\frac{2}{3}$$

Слѣд.: $$\frac{BE^2}{BC^2}=\frac{1}{3} \quad\text{и}\quad \frac{BG^2}{BC^2}=\frac{2}{3}$$

Откуда: $$BE=\sqrt{\frac{1}{3}BC^2}=\sqrt{\frac{1}{3}BC\,.\,BC}$$

и $$BG=\sqrt{\frac{2}{3}BC^2}=\sqrt{\frac{2}{3}BC\,.\,BC}$$

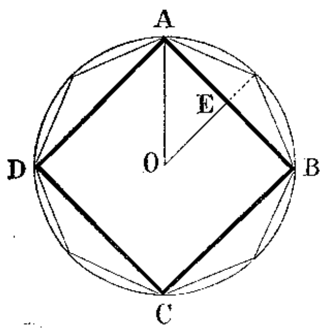
Изъ этихъ формулъ видимъ, что BE есть средняя пропорціанальная между BC и $^1/_3BC$, а BG есть средняя пропорціанальная между BC и $^2/_3BC$ (**224**,4). Поэтому построеніе можно выполнить такъ: раздѣлимъ BC на три равныя части въ точкахъ a и b; опишемъ на BC полуокружность; изъ a и b возставимъ къ BC перпендикуляры aH и bK. Хорды BH и BK будутъ искомыми средними пропорціанальными: первая между всѣмъ діаметромъ BC и его третьею частью Ba, вторая между BC и Bb, т.-е. между BC и $^2/_3 BC$ (**202**). Остается отложить эти хорды на BC отъ точки B; тогда получимъ точки E и G.

Подобнымъ образомъ можно раздѣлить тр.-къ на какое угодно иное число равновеликихъ частей.

ГЛАВА IV.

Площадь круга и его частей.

294. Лемма 1. *При неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ правильнаго многоугольника, вписаннаго въ окружность, разность между радіусомъ и апоѳемою этого многоугольника стремится къ нулю.*



Черт. 209

Пусть $ABCD$ будетъ какой-нибудь правильный впис. многоугольникъ, OA радіусъ и OE апоѳема. Изъ тр.-ка OAE находимъ (**50**):

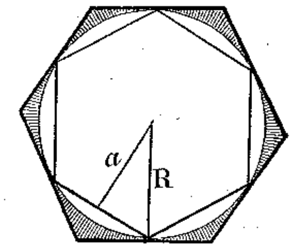
$$OA - OE < AE$$

или
$$OA - OE < \frac{1}{2} AB$$

т.-е. разность между радіусомъ и апоѳемою меньше половины стороны правильнаго многоугольника. Но при неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ прав. впис. многоугольника каждая сторона его, очевидно, стремится къ нулю; поэтому разность между радіусомъ и апоѳемою, и подавно, стремится къ нулю.

295. Лемма 2. *Площадь круга есть общій предѣлъ площадей правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ при неограниченномъ удвоеніи числа ихъ сторонъ.*

Впишемъ въ данный кругъ и опишемъ около него по какому-нибудь правильному одноименному многоугольнику (напр., шестиугольнику).



Черт. 210

Пусть K, Q и q будутъ соотвѣтственно площади круга, описаннаго и вписаннаго многоугольниковъ. Изъ чертежа мы непосредственно видимъ, что

$$Q > K \text{ и } K > q$$

Когда станемъ удваивать число сторонъ обоихъ многоугольниковъ, площади ихъ Q и q сдѣлаются величинами перемѣнными (причемъ очевидно, что Q будетъ уменьшаться, а q увеличиваться). Мы должны доказать, что постоянная величина K будетъ при этомъ служить общимъ предѣломъ для Q и q; другими словами, мы должны доказать, что каждая изъ разностей:

$$Q - K \text{ и } K - q$$

стремится къ нулю. Для этого возьмемъ третью, вспомогательную, разность

$$Q - q$$

которая, очевидно, больше каждой изъ двухъ первыхъ разностей, и докажемъ, что даже и эта, бóльшая, разность стремится къ нулю. Обозначивъ апоѳемы описаннаго и вписаннаго многоугольниковъ черезъ R и a, будемъ имѣть (**292**):

$$\frac{Q}{q} = \frac{R^2}{a^2}$$

Составимъ изъ этой пропорціи производную (разность членовъ перваго отношенія относится такъ къ предыдущему члену этого отношенія, какъ....):

$$\frac{Q - q}{Q} = \frac{R^2 - a^2}{R^2}$$

Откуда:
$$(Q - q)\, R^2 = Q\,(R^2 - a^2)$$

или
$$(Q - q)\, R^2 = Q\,(R + a)\,(R - a)$$

Такъ какъ при неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ многоугольниковъ разность $R-a$, по доказанному въ предыдущей леммѣ, стремится къ нулю, а сомножители Q и $R+a$ не увеличиваются безпредѣльно, то правая часть послѣдняго равенства (а слѣд. и лѣвая часть) стремится къ нулю. Но произведеніе $(Q-q)R^2$ можетъ стремиться къ нулю только тогда, когда сомножитель $Q-q$ стремится къ нулю (такъ какъ другой сомножитель R^2 есть число постоянное). Если же разность $Q-q$ стремится къ нулю, то, и подавно, то же самое можно сказать о меньшихъ разностяхъ $Q-K$ и $K-q$. Изъ этого слѣдуетъ, что

$$K = \text{пред. } Q = \text{пред. } q.$$

296. Теорема. *Площадь круга равна произведенію длины окружности на половину радіуса.*

Пусть R, K и C означаютъ радіусъ, площадь и длину данной окружности, а Q и P—площадь и периметръ какого-нибудь правильнаго описаннаго многоугольника. Тогда можемъ написать (**283**):

$$Q = P.\frac{1}{2}R \qquad [1]$$

Вообразимъ теперь, что число сторонъ описаннаго многоугольника неограниченно удваивается. Тогда величины Q и P сдѣлаются перемѣнными, стремящимися къ предѣламъ: первая къ площади круга K, вторая—къ длинѣ окружности C. Такъ какъ равенство [1] остается вѣрнымъ при всѣхъ измѣненіяхъ Q и P, то оно должно остаться вѣрнымъ и тогда, когда вмѣсто перемѣнныхъ подставимъ ихъ предѣлы (**251**) значитъ:

$$K = C.\frac{1}{2}R$$

Подставивъ на мѣсто C выраженіе $2\pi R$ (**262**,2°), получимъ:

$$K = \pi R^2$$

т.-е. *площадь круга равна произведенію квадрата радіуса на отношеніе окружности къ діаметру.*

Слѣдствіе. *Площади круговъ относятся, какъ квадраты радіусовъ или діаметровъ.*

Дѣйствительно, если K и K_1 будутъ площади двухъ круговъ, а R и R_1 ихъ радіусы, то

$$K = \pi R^2 \text{ и } K_1 = \pi R_1^2$$

Откуда: $$\frac{K}{K_1} = \frac{\pi R^2}{\pi R_1^2} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{4R^2}{4R_1^2} = \frac{(2R)^2}{(2R_1)^2}$$

297. Задача 1°. *Вычислить площадь круга, окружность котораго равна 2 метрамъ.*

Для этого предварительно найдемъ радіусъ R изъ уравненія:

$$2\pi R = 2;\ \text{откуда } R = \frac{1}{\pi}$$

Затѣмъ опредѣляемъ площадь круга:

$$K = \pi R^2 = \pi.\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{\pi} = 0{,}3183 \text{ квадр. метра.}$$

Задача 2°. *Построить квадратъ, равновеликій данному кругу.*

Эта задача, извѣстная подъ названіемъ *квадратуры круга*, не можетъ быть точно рѣшена при помощи циркуля и линейки. Дѣйствительно, если обозначимъ черезъ x сторону искомаго квадрата, а черезъ R радіусъ круга, то получимъ уравненіе:

$$x^2 = \pi R^2;\ \text{откуда: } \pi R : x = x : R.$$

т.-е. x есть средняя пропорціанальная между полуокружностью и радіусомъ. Но доказано, что помощью циркуля и линейки нельзя построить прямую, которая въ точности равнялась бы длинѣ полуокружности (см. выноску къ задачѣ № 257); слѣд., нельзя въ точности рѣшить задачу о превращеніи круга въ квадратъ. Приближенное же рѣшеніе можно выполнить, если предварительно найти приближенную длину полуокружности и затѣмъ построить среднюю пропорціональную между этою длиною и радіусомъ.

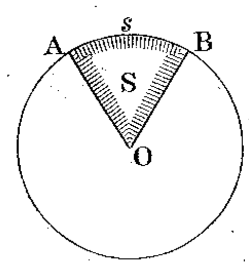
298. Теорема. *Площадь сектора равна произведенію его дуги на половину радіуса.*

Пусть дуга AB сектора AOB содержитъ $n°$. Очевидно, что площадь сектора, котораго дуга содержитъ 1°, равна

$$\frac{\pi R^2}{360}$$

Слѣд., площадь S сектора котораго дуга содержитъ $n°$, равна

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi R}{180}\cdot\frac{R}{2}$$

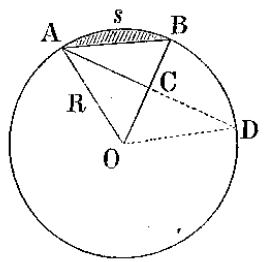


Черт. 211

Но $\frac{R\pi}{180}$ выражаетъ длину дуги AB. Обозначивъ ее черезъ s, получимъ:

$$S = s\cdot\frac{R}{2}$$

299. Задача. *Вычислить площадь сегмента, зная радіусъ круга и число градусовъ, заключающееся въ дугѣ сегмента.*



Черт. 212

Чтобы получить площадь сегмента ASB, достаточно изъ площади сектора AOB вычесть площадь тр.-ка AOB. Проведя $AC \perp OB$, будемъ имѣть:

площадь сектора $=\frac{1}{2}Rs$

площадь тр.-ка $=\frac{1}{2}\,OB\,.\,AC=\frac{1}{2}\,R\,.\,AC$

Слѣд. площ. сегмента $=\frac{1}{2}R(s-AC)$.

Такимъ образомъ вопросъ приводится къ вычисленію высоты AC. Геометрически ее можно найти только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ слѣдующимъ способомъ.

Продолживъ AC до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ D, мы увидимъ, что $AC=CD$ и $\smile AB=\smile BD$; значитъ, AC есть половина хорды, стягивающей дугу, вдвое большую дуги сегмента. Отсюда заключаемъ, что если хорда, стягивающая двойную дугу, будетъ сторона такого правильнаго вписаннаго многоугольника, для котораго мы знаемъ формулу его стороны, то высота AC опредѣлится геометрически. Напр., пусть дуга сегмента содержитъ 60°. Тогда AD есть сторона правильнаго вписаннаго треугольника; значитъ, $AC=\frac{1}{2}R\sqrt{3}$. Дуга AB въ этомъ случаѣ равна $\frac{1}{6}$ окружности, т.-е. $\frac{1}{3}\pi R$; поэтому:

$$\text{площ. сегмента}=\frac{1}{2}R\left(\frac{\pi R}{3}-\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{12}R^2(2\pi-3\sqrt{3})$$

300. Теорема. *Сумма площадей подобныхъ многоугольниковъ (или круговъ), построенныхъ на катетахъ прямоугольнаго треугольника, равна площади подобнаго многоугольника (или круга), построеннаго на гипотенузѣ, если катеты и гипотенуза служатъ сходственными сторонами этихъ многоугольниковъ (или діаметрами круговъ).*

Пусть Q, R и S будутъ площади подобныхъ фигуръ (или

круговъ), построенныхъ на катетахъ и гипотенузѣ прямоугольнаго тр.-ка ABC. Тогда (**292, 296**, слѣдствіе).

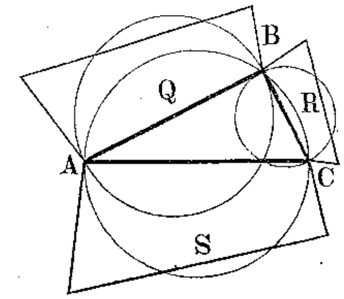
$$\frac{Q}{S}=\frac{AB^2}{AC^2}\qquad\frac{R}{S}=\frac{BC^2}{AC^2}$$

Сложивъ эти равенства, найдемъ:

$$\frac{Q+R}{S}=\frac{AB^2+BC^2}{AC^2}$$

Но $AB^2+BC^2=AC^2$ (**204**); поэтому:

$$Q+R=S$$

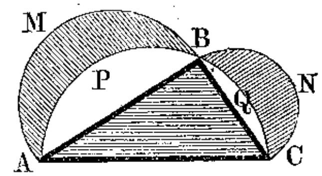


Черт. 213

301. Слѣдствіе. *Если на сторонахъ прямоугольнаго треугольника* ABC (черт. 214) *построимъ полукруги, расположенные въ одну сторону, то сумма образовавшихся при этомъ фигуръ $AMBP$ и $BNCQ$ равна площади треугольника.*

Дѣйствительно, сумма полукруговъ, построенныхъ на катетахъ, равновелика полукругу, построенному на гипотенузѣ; если же отъ обѣихъ частей этого равенства отнимемъ сумму сегментовъ APB и BQC, то получимъ:

$$AMBP+BNCQ=ABC$$



Черт. 214

Фигуры $AMBP$ и $BNCQ$ извѣстны въ геометріи подъ названіемъ *Гиппократовыхъ луночекъ.*

Когда треугольникъ равнобедренный, то обѣ луночки одинаковы и каждая изъ нихъ равновелика половинѣ треугольника.

ГЛАВА V.

Соотношеніе между сторонами треугольника и радіусами вписаннаго и описаннаго круговъ.

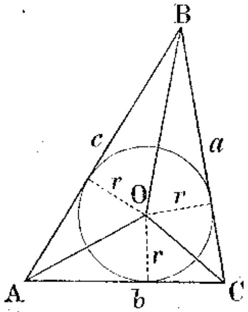
302. Для радіуса R описаннаго около треугольника круга мы вывели (**221**) слѣдующее выраженіе:

$$R=\frac{bc}{2h_a}$$

Исключимъ изъ этой формулы высоту h_a; для этого умножимъ числителя и знаменателя дроби на a; тогда, замѣнивъ произведеніе $h_a a$ удвоенною площадью треугольника, (которую обозначимъ S), получимъ:

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{abc}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

гдѣ $p={}^1/_2(a+b+c)$.

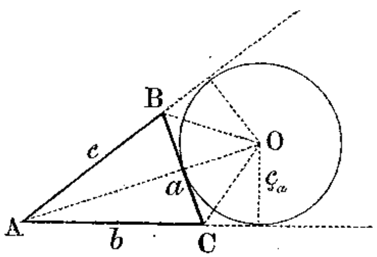

Черт. 215

Чтобы найти радіусъ r внутренняго вписаннаго круга (черт. 215) примемъ во вниманіе, что прямыя OA, OB и OC раздѣляютъ данный тр.-къ на три другіе тр.-ка, у которыхъ основаніями служатъ стороны даннаго тр.-ка, а высотою радіусъ r. Поэтому:

$$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=r\cdot\frac{1}{2}(a+b+c)=rp$$

Отсюда $$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Радіусъ ρ_a внѣвписаннаго круга, (черт. 216) касающагося стороны a, можно опредѣлить изъ равенства:


Черт. 216

пл. $ABC=$ пл. $ACO+$ $+$ пл. $ABO-$ пл. BOC

т.-е. $S=\frac{1}{2}b\rho_a+\frac{1}{2}c\rho_a-\frac{1}{2}a\rho_a$

Откуда:

$$\rho_a=\frac{2S}{b+c-a}=\frac{2S}{2(p-a)}=\frac{S}{p-a}$$

Подобно этому найдемъ:

$$\rho_b=\frac{S}{p-b} \quad \text{и} \quad \rho_c=\frac{S}{p-c}$$

Между четырьмя радіусами: r, ρ_a, ρ_b и ρ_c существуютъ нѣкоторыя зависимости. Укажемъ простѣйшую изъ нихъ:

$$\frac{1}{\rho_a}+\frac{1}{\rho_b}+\frac{1}{\rho_c}=\frac{3p-a-b-c}{S}=\frac{3p-2p}{S}=\frac{p}{S}$$

Но $\frac{1}{r}=\frac{p}{S}$; слѣд. $\frac{1}{\rho_a}+\frac{1}{\rho_b}+\frac{1}{\rho_c}=\frac{1}{r}$

УПРАЖНЕНІЯ.

Доказать теоремы:

261. Въ параллелограммѣ разстоянія какой-нибудь точки діагонали отъ двухъ прилежащихъ сторонъ обратно пропорціанальны этимъ сторонамъ.

262. Площадь трапеціи равна половинѣ произведенія одной изъ непараллельныхъ сторонъ на перпендикуляръ, опущенный изъ средины другой непараллельной стороны на первую.

263. Два четыреугольника равновелики, если у нихъ равны порознь діагонали и уголъ между ними.

264. Если площади двухъ треугольниковъ, прилежащихъ къ основаніямъ трапеціи и образуемыхъ отъ пересѣченія ея діагоналей, равны соотвѣтственно p^2 и q^2, то площадь всей трапеціи равна $(p+q)^2$.

265. Площадь правильнаго вписаннаго шестиугольника равна ${}^3/_4$ площади правильнаго описаннаго шестиугольника.

266. Въ четыреугольникѣ $ABCD$ черезъ средину діагонали BD проведена прямая, параллельная другой діагонали AC; эта прямая пересѣкаетъ сторону AD въ точкѣ E. Доказать, что прямая CE дѣлитъ четыреугольникъ пополамъ.

267. Если медіаны треугольника взять за стороны другого треугольника, то площадь послѣдняго равна ${}^3/_4$ площади перваго.

268. Въ кругѣ съ центромъ O проведена хорда AB. На радіусѣ OA, какъ на діаметрѣ, описана окружность. Доказать, что площади двухъ сегментовъ, отсѣкаемыхъ хордою AB отъ обоихъ круговъ, относятся, какъ $4:1$.

Задачи на вычисленіе.

269. Вычислить площадь прямоугольной трапеціи, у которой одинъ изъ угловъ равенъ 60^0, зная или оба основанія, или одно основаніе и высоту, или одно основаніе и боковую сторону, наклонную къ основанію.

270. Вычислить площадь равносторонняго треугольника, зная его высоту h.

271. Даны основанія трапеціи B и b и ея высота H. Вычислить высоту треугольника, образованнаго продолженіемъ непараллельныхъ сторонъ трапеціи до взаимнаго пересѣченія.

272. Составить формулу для площади правильнаго вписаннаго 12-угольника въ зависимости отъ радіуса круга.

273. Въ треугольникъ вписанъ другой треугольникъ, котораго вершины дѣлятъ пополамъ стороны перваго треугольника; въ другой треугольникъ вписанъ подобнымъ же образомъ третій тр.-къ; въ третій —

четвертый; и т. д. безъ конца. Найти предѣлъ суммы площадей этихъ треугольниковъ.

274. Въ данномъ треугольникѣ извѣстны стороны a, b и c. Изъ срединъ этихъ сторонъ возстановлены перпендикуляры x, y и z до взаимнаго пересѣченія въ центрѣ описаннаго круга. Найти въ зависимости отъ a, b и c величины x, y, z и радіусъ R описаннаго круга (*указаніе:* пользуясь теоремою Птоломея (215), можно вывести уравненія: $bz+cy=aR$, $cx+az=bR$, $ay+bx=cR$ и $ax+by+cz=2S$, гдѣ S есть площадь треугольника).

Задачи на построеніе.

275. Раздѣлить треугольникъ прямыми, проходящими черезъ его вершину, на три части, которыхъ площади относились бы, какъ $m:n:p$.

276. Раздѣлить пополамъ тр.-къ прямою, проходящею черезъ данную точку его стороны.

277. Найти внутри тр.-ка такую точку, чтобы прямыя, соединяющія ее съ вершинами тр.-ка, дѣлили его на три равновеликія части.

278. — то же — на три части въ отношеніи $2:3:4$ (или вообще $m:n:p$).

279. Раздѣлить параллелограммъ на три равновеликія части прямыми, исходящими изъ вершины его.

280. Раздѣлить параллелограммъ на двѣ части въ отношеніи $m:n$ прямою, проходящею черезъ данную точку.

281. Раздѣлить параллелограммъ на 3 равновеликія части прямыми, параллельными діагонали.

282. Раздѣлить площадь тр.-ка въ среднемъ и крайнемъ отношеніи прямою, параллельною основанію.

283. Раздѣлить тр.-къ на три равновеликія части прямыми, перпендикулярными къ основанію.

284. Раздѣлить кругъ на 2, на 3,... равновеликія части концентрическими окружностями.

285. Раздѣлить пополамъ трапецію прямою, параллельною основаніямъ (*указаніе:* продолживъ непараллельныя стороны до взаимнаго пересѣченія, взять за неизвѣстную величину разстояніе конца искомой линіи до вершины тр.-ка; составить пропорціи, исходя изъ площадей подобныхъ тр.-ковъ....)

286. Данный прямоугольникъ превратить въ другой равновеликій прямоугольникъ съ даннымъ основаніемъ.

287. Построить квадратъ, равновеликій $^2/_3$ даннаго квадрата.

288. Превратить квадратъ въ равновеликій прямоугольникъ, у котораго сумма s или разность d двухъ смежныхъ сторонъ дана.

289. Построить кругъ, равновеликій кольцу, заключенному между двумя данными концентрическими окружностями.

290. Построить тр.-къ, подобный одному и равновеликій другому изъ двухъ данныхъ тр.-ковъ.

291. Данный тр.-къ превратить въ равновеликій равносторонній (посредствомъ приложенія алгебры къ геом.).

292. Въ данный кругъ вписать прямоугольникъ съ данною площадью m^2 (посредствомъ приложенія алгебры къ геом.).

293. Въ данный тр.-къ вписать прямоугольникъ съ данною площадью m^2 (прилож. алг. къ геом.).

Числовыя задачи на разные отдѣлы планиметріи*).

294. Катеты прямоуг. тр.-ка суть 3 ф. и 4 ф. Найти площадь круга, котораго окружность проходитъ черезъ средину меньшаго катета и касается гипотенузы въ ея срединѣ.

295. Точка касанія окружности, вписанной въ прямоугольный тр.-къ, дѣлитъ гипотенузу на отрѣзки a и b. Найти площадь тр.-ка.

296. Катеты прям. тр.-ка суть b и c фут. Найти биссектриссу прямого угла.

297. Радіусы двухъ концентрическихъ окружностей суть 15 д. и 8 д. На продолженномъ діаметрѣ взята точка на разстояніи 17 д. отъ общаго центра и изъ нея проведены касательныя къ этимъ окружностямъ. Найти разстояніе точекъ касанія (*указаніе:* примѣнить теорему Птоломея).

298. Часть площади круга, заключенная между стороною вписаннаго квадрата и параллельною ей стороною правильнаго впис. 6-угольника, равна $^1/_{12}\,(\pi+3\sqrt{3}-6)$. Найти сторону квадрата, равновеликаго данному кругу.

299. Въ ромбъ, который раздѣляется діагональю на два равносторонніе тр.-ка, вписанъ кругъ. Найти сторону ромба въ зависимости отъ радіуса этого круга.

300. Въ тр.-кѣ, котораго стороны суть 4 ф., 5 ф. и 6 ф., проведены биссектриссы меньшаго угла и смежнаго съ нимъ внѣшняго угла. Найти отрѣзокъ противолежащей стороны, заключенный между этими биссектриссами.

301. Въ равностороннемъ тр.-кѣ со стороною a вписанъ кругъ, а изъ вершины тр.-ка радіусомъ, равнымъ половинѣ его стороны, описана другая окружность. Найти площадь, общую обоимъ кругамъ.

302. Въ треугольникѣ двѣ стороны суть a и b. Найти третью сторону и площадь, если уголъ между сторонами a и b равенъ: 45^0; 60^0; 150^0; 120^0; 75^0; 135^0.

303. Длины двухъ параллельныхъ хордъ круга суть 30 д. и 16 д., а разстояніе между ними 7 д. Найти площадь круга.

304. Черезъ точку, удаленную отъ центра круга на длину діаметра, проведена такая сѣкущая, которая дѣлится окружностью пополамъ. Найти длину сѣкущей, если радіусъ круга равенъ $\sqrt{6}$.

---

*) Взяты изъ „*Сборника геометрическихъ задачъ для повторительнаго курса планиметріи*“, составилъ М. Попруженко, Воронежъ, 1889 года.

305. Въ кругѣ радіуса R проведена хорда, стягивающая дугу въ 108^0. Найти ея длину.

306. На діаметрѣ полукруга радіуса R построенъ равносторонній тр.-къ. Найти площадь той его части, которая лежитъ внѣ круга.

307. Найти радіусъ окружности, касательной къ сторонамъ a и b треугольника, и центръ которой лежитъ на третьей его сторонѣ c.

308. Къ двумъ извнѣ касающимся въ точкѣ A окружностямъ, радіусы которыхъ суть 3 д. и 1 д., проведена внѣшняя касательная BC. Найти площадь фигуры ABC, ограниченной двумя дугами и касательной.

309. Полуокружность радіуса R раздѣлена на три равныя части и точки дѣленія соединены съ концомъ діаметра. Найти площадь, ограниченную двумя хордами и заключенною между ними дугою.

310. Стороны тр.-ка ABC продолжены въ одномъ направленіи до точекъ A_1, B_1 и C_1, такъ что $AA_1=3AB$, $BB_1=3BC$ и $CC_1=3CA$. Найти отношеніе площадей тр.-ковъ ABC и $A_1B_1C_1$.

311. Изъ вершины тр.-ка проведена къ его основанію прямая, дѣлящая основаніе на два отрѣзка m и n. Найти длину этой прямой, если стороны тр.-ка, прилежащія къ отрѣзкамъ m и n, суть a и b.

312. Кругъ радіуса R обложенъ тремя равными кругами, касающимися даннаго и взаимно. Найти радіусъ одного изъ этихъ круговъ.

313. Опредѣлить высоту башни, если извѣстно, что нужно отойти на a футовъ отъ ея основанія, чтобы башня была видна подъ угломъ въ 30^0.

314. По даннымъ хордамъ a и b, стягивающимъ двѣ дуги въ кругѣ единичнаго радіуса, найти хорду, стягивающую разность этихъ дугъ (*Указаніе:* примѣнить теорему Птоломея).

315. Прямая, параллельная основаніямъ трапеціи, раздѣляетъ ее на двѣ части въ отношеніи 7 : 2 (считая отъ большаго основанія). Найти длину этой прямой, если основанія трапеціи суть 5 ф. и 3 ф.

316. Изъ точки, дѣлящей основаніе тр.-ка въ отношеніи $m:n$, проведены прямыя, параллельныя двумъ другимъ сторонамъ. Найти отношеніе площади каждой изъ частей, на которыя раздѣлится тр.-къ, къ площади всего тр.-ка.

317. Изъ нѣкоторой точки внутри тр.-ка на стороны его a, b и c опущены перпендикуляры p_1, p_2 и p_3. Найти отношеніе площади тр.-ка, который образуется отъ соединенія основаній этихъ перпендикуляровъ, къ площади даннаго тр.-ка. (*Указаніе:* см. § 290).

318. Вычислить діагонали трапеціи по четыремъ ея сторонамъ a, b, c и d. (*Указаніе:* надо примѣнить къ діагонали теорему о квадратѣ стороны тр.-ка).

319. Найти площадь трапеціи по четыремъ ея сторонамъ a, b, c и d.

320. На противоположныхъ сторонахъ квадрата построены внутри его два равносторонніе тр.-ка. Пересѣченіе сторонъ этихъ тр.-ковъ опредѣляетъ нѣкоторый четыреугольникъ. Найти его видъ, стороны, углы и площадь, если сторона квадрата равна a.

321. Проведена окружность, касающаяся одной стороны прямого угла и пересѣкающая другую сторону въ точкахъ, отстоящихъ отъ вершины угла на 6 д. и 24 д. Вычислить радіусъ этой окружности и разстояніе точки касанія отъ вершины угла.

322. Вычислить площадь тр.-ка по двумъ сторонамъ a и b и медіанѣ α относительно третьей стороны.

323. На общей хордѣ AB построены (по одну сторону отъ AB) два сегмента, изъ которыхъ одинъ вмѣщаетъ уголъ 135^0, а другой 120^0. Найти площадь луночки, заключенной между дугами сегментовъ.

324. На радіусахъ квадранта (четверть круга) внутри его построены два полукруга. Найти площадь той части квадранта, которая лежитъ внѣ полукруговъ, если радіусъ квадранта есть R.

325. Въ прямоугольномъ тр.-кѣ ABC опущенъ перпендикуляръ AD на гипотенузу BC. Зная радіусы r_1 и r_2 окружностей, вписанныхъ въ тр.-ки ABD и ACD, найти радіусъ r окружности, вписанной въ треугольникъ ABC.

326. На окружности радіуса R отложены отъ точки A (по обѣ ея стороны) двѣ дуги: $AC=30^0$ и $AB=60^0$. Найти площадь тр.-ка ABC.

СТЕРЕОМЕТРІЯ.

КНИГА I.

ПРЯМЫЯ И ПЛОСКОСТИ.

ГЛАВА I.

Опредѣленіе положенія плоскости.

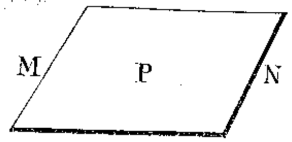
303. Опредѣленіе. Плоскостью наз. поверхность, обладающая тѣмъ свойствомъ, что *прямая, проходящая черезъ какія-нибудь двѣ точки этой поверхности, лежитъ въ ней всѣми остальными своими точками.* Возможность существованія такой поверхности принимается за аксіому.

304. Изъ понятія о плоскости и прямой линіи слѣдуетъ:

1°. Плоскость есть поверхность неограниченная.

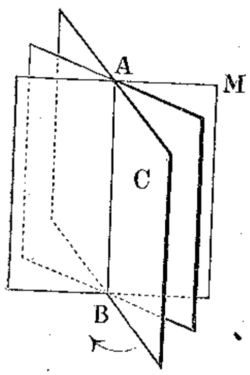
2°. Прямая, имѣющая съ плоскостью только одну общую точку, *пересѣкаетъ* плоскость, т.-е. изъ пространства, лежащаго по одну сторону отъ плоскости, переходитъ въ пространство, лежащее по другую ея сторону.

3°. Черезъ всякую прямую можно провести плоскость.



Черт. 217

305. Плоскость изображается на чертежѣ въ видѣ нѣкоторой ея части, обыкновенно въ формѣ параллелограмма или прямоугольника. Обозначается плоскость бо́льшею частію одною или двумя буквами; такъ, говорятъ: плоскость P, плоскость MN.

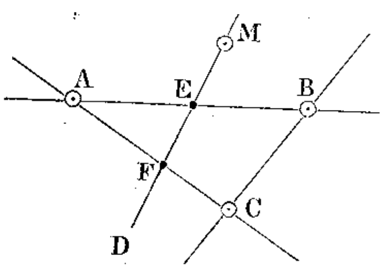


Черт. 218

306. Аксіома. *Если вращать какую-нибудь плоскость (M, черт. 218) вокругъ прямой (AB), лежащей въ ней, то она можетъ пройти черезъ любую точку (C) пространства.*

307. Теорема. *Черезъ три точки (A, B и C, черт. 219), не лежащія на одной прямой, можно провести плоскость и притомъ только одну.*

1°. Черезъ какія-нибудь двѣ изъ трехъ данныхъ точекъ, напр. черезъ A и B, проведемъ прямую и черезъ нее произвольную плоскость. Станемъ вращать эту плоскость вокругъ прямой AB до тѣхъ поръ, пока она не пройдетъ черезъ точку C (**306**). Тогда будемъ имѣть плоскость, которая проходитъ черезъ три данныя точки.



Черт. 219

2°. Вообразимъ, что черезъ тѣ же три точки A, B и C можно провести двѣ плоскости. Обозначимъ одну черезъ P, а другую черезъ P_1. Докажемъ, что эти двѣ плоскости сливаются въ одну.—Предварительно замѣтимъ, что прямыя AB, BC и AC, проходящія черезъ каждую пару данныхъ точекъ, принадлежатъ обѣимъ плоскостямъ, такъ какъ эти прямыя имѣютъ по двѣ общихъ точки и съ плоскостью P, и съ плоскостью P_1. Возьмемъ теперь на плоскости P произвольную точку M и проведемъ черезъ нее на этой плоскости какую-

нибудь прямую MD. Эта прямая, находясь въ одной плоскости P съ прямыми AB, BC и AC, должна пересѣчься по крайней мѣрѣ съ двумя изъ нихъ, напр. съ AB и AC, въ нѣкоторыхъ точкахъ E и F. Такъ какъ прямыя AB и AC принадлежатъ другой плоскости P_1, то и точки ихъ E и F также принадлежатъ этой плоскости. Вслѣдствіе этого прямая MD, проходящая черезъ E и F, лежитъ вся въ плоскости P_1 (по опредѣленію плоскости), а потому и ея точка M лежитъ въ этой плоскости. Такимъ образомъ, всякая точка M плоскости P принадлежитъ и плоскости P_1; значитъ, эти плоскости сливаются.

308. Слѣдствія. 1°. *Черезъ прямую и точку внѣ ея можно провести плоскость и притомъ только одну,* потому что точка внѣ прямой вмѣстѣ съ какими-нибудь двумя точками прямой составляютъ три точки, черезъ которыя, по доказанному, можно провести плоскость и притомъ одну.

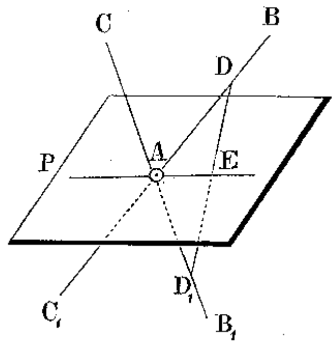
2°. *Черезъ двѣ пересѣкающіяся прямыя можно провести плоскость и притомъ только одну,* потому что, взявъ точку пересѣченія и еще по одной точкѣ на каждой прямой, мы будемъ имѣть три точки, черезъ которыя и т. д.

3°. *Черезъ двѣ параллельныя прямыя можно провести плоскость и притомъ только одну,* потому что параллельныя прямыя, по опредѣленію, лежатъ въ одной плоскости; эта плоскость единственная, такъ какъ черезъ одну изъ параллельныхъ и какую-нибудь точку другой можно провести не болѣе одной плоскости.

4°. *Всякую часть плоскости можно наложить всѣми ея точками на другое мѣсто этой или другой плоскости, причемъ накладываемую часть можно предварительно перевернуть другою стороною,* потому что всегда возможно наложить одну плоскость на другую такъ, чтобы у нихъ совпали какія-нибудь три точки, не лежащія на одной прямой, а тогда совпадутъ и остальныя точки.

309. Теорема. *Если двѣ не сливающіяся плоскости имѣютъ общую точку, то онѣ имѣютъ и общую прямую, проходящую черезъ эту точку.*

Пусть плоскость P имѣетъ точку A, общую съ другою плоскостью Q (не указанною на чертежѣ). Проведемъ на плоскости Q черезъ точку A какія-нибудь двѣ прямыя CB_1 и BC_1; изъ нихъ каждая подраздѣлится плоскостью P на двѣ части, расположенныя по разныя стороны отъ этой плоскости. Возьмемъ на частяхъ AB и AB_1 какія-нибудь точки D и D_1 и проведемъ прямую DD_1. Эта прямая пересѣчется съ плоскостью P въ нѣкоторой точкѣ E. Такъ какъ, съ другой стороны, эта прямая имѣетъ съ плоскостью Q двѣ общихъ точки D и D_1, то она принадлежитъ ей вся. Поэтому точка E прямой DD_1 также принадлежитъ плоскости Q. Итакъ, плоскости P и Q имѣютъ двѣ общія точки A и E; значитъ, онѣ имѣютъ и общую прямую AE, проходящую черезъ эти точки.



Черт. 220

310. Слѣдствіе. *Пересѣченіе двухъ плоскостей есть прямая линія.*

Дѣйствительно, чтобы плоскости пересѣкались, необходимо, чтобы онѣ имѣли общую точку; но въ такомъ случаѣ онѣ будутъ имѣть и общую прямую. Какой-нибудь еще общей точки, сверхъ точекъ этой прямой, плоскости имѣть не могутъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ онѣ должны были бы слиться въ одну (**308**, 1°).

ГЛАВА II.

Перпендикуляръ и наклонныя.

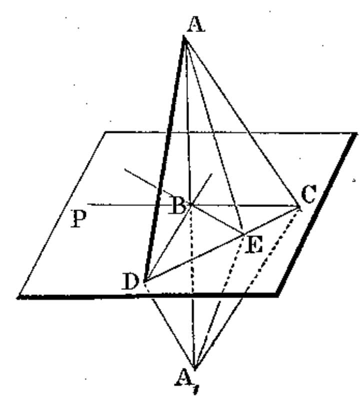
311. Опредѣленіе. Прямая наз. *перпендикулярною къ плоскости,* если она пересѣкается съ этою плоскостью и при этомъ образуетъ прямые углы со всѣми прямыми, проведенными на плоскости черезъ точку пересѣченія. Въ этомъ случаѣ говорятъ также, что плоскость перпендикулярна къ прямой.

Прямая, пересѣкающаяся съ плоскостью, но не перпендикулярная къ ней, наз. *наклонною.* Точка пересѣченія прямой съ плоскостью наз. *основаніемъ* (перпендикуляра или наклонной).

Возможность существованія взаимно перпендикулярныхъ прямой и плоскости обнаружится изъ нижеслѣдующихъ теоремъ.

312. Теорема. *Прямая, перпендикулярная къ двумъ прямымъ, проведеннымъ на плоскости черезъ ея основаніе, перпендикулярна къ самой плоскости.*

Пусть прямая AB перпендикулярна къ прямымъ BC и BD, проведеннымъ на плоскости P черезъ основаніе B. Чтобы доказать перпендикулярность прямой AB къ плоскости P, достаточно показать, что AB перпендикулярна ко всякой третьей прямой BE, проведенной на той же плоскости черезъ точку B. — Продоливъ AB, отложимъ произвольныя, но равныя, длины BA_1 и BA и проведемъ на плоскости прямую DC, которая пересѣкала бы прямыя BC, BE и BD въ какихъ-нибудь точкахъ C, E и D. Соединимъ эти точки съ A и A_1 и убѣдимся, что тр.-ки ABE и A_1BE равны. Для этого

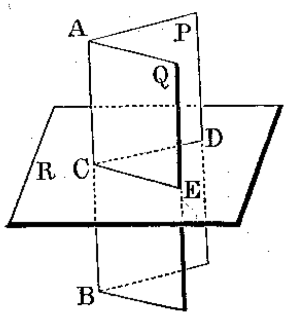


Черт. 221

сначала беремъ тр.-ки ADC и A_1DC; они равны, потому что у нихъ DC общая сторона, $AC=A_1C$, какъ наклонныя къ AA_1, одинаково удаленныя отъ основанія перпендикуляра BC; по той же причинѣ $AD=A_1D$. Изъ равенства этихъ тр.-ковъ слѣдуетъ, что $\angle ACD=\angle A_1CD$. Послѣ этого перейдемъ къ тр.-камъ ACE и A_1CE; они равны, потому что у нихъ EC общая сторона, $AC=A_1C$ и $\angle ACD=\angle A_1CD$; изъ равенства этихъ тр.-ковъ выводимъ, что $AE=A_1E$. Теперь оказывается, что тр.-ки ABE и A_1BE имѣютъ соотвѣтственно равныя стороны и потому равны; значитъ, $\angle ABE=\angle A_1BE$, т.-е. $AB \perp BE$.

313. Теорема. *Черезъ всякую точку, взятую на прямой или внѣ ея, можно провести къ этой прямой перпендикулярную плоскость и притомъ только одну.*

1°. Пусть C будетъ точка, взятая на прямой AB. Проведемъ черезъ эту прямую какія-нибудь двѣ плоскости P и Q и на нихъ возьмемъ прямыя CD и CE, перпендикулярныя къ AB. Черезъ эти двѣ пересѣкающіяся прямыя проведемъ плоскость R. Это и будетъ плоскость, перпендикулярная къ AB въ точкѣ C, потому что двѣ ея прямыя CD и CE перпендикулярны къ AC. Такая плоскость можетъ быть только одна. Дѣйствительно, всякая плоскость, перпендикулярная къ AB въ точкѣ C, должна пересѣчься съ плоскостями P и Q по прямымъ, перпендикулярнымъ къ AC и проходящимъ черезъ точку C; такими прямыми будутъ только CD и CE; а черезъ CD и CE можетъ проходить только одна плоскость.



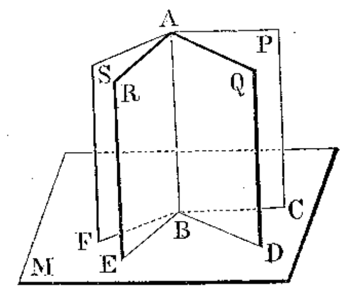
Черт. 222

2°. Пусть D будетъ точка, взятая внѣ прямой AB (черт. 222). Проведемъ черезъ D и AB плоскость P и черезъ AB еще какую-нибудь плоскость Q; на первой опустимъ на AB изъ точки D перпендикуляръ DC, а на второй возставимъ къ AB изъ точки C перпендикуляръ CE. Плоскость R, проходящая черезъ DC и CE, будетъ перпендикулярна къ

AB (**312**). Другой перпендикулярной плоскости черезъ точку D провести нельзя. Дѣйствительно, всякая плоскость, перпендикулярная къ AB и проходящая черезъ D, пересѣчется съ плоскостью P по прямой, перпендикулярной къ AB и проходящей черезъ D, т.-е. по DC; тогда съ плоскостью Q она можетъ пересѣчься только по прямой CE; а черезъ DC и CE можетъ проходить только одна плоскость.

314. Слѣдствіе. *Всѣ перпендикуляры, которые можно провести въ пространствѣ къ одной прямой черезъ одну ея точку, лежатъ въ одной плоскости, перпендикулярной къ этой прямой.*

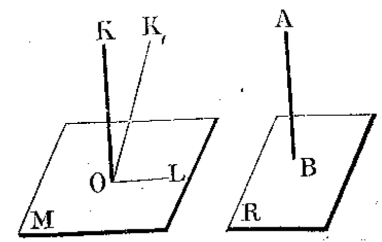
Проведемъ черезъ прямую AB сколько угодно плоскостей P, Q, R, S.. и на каждой изъ нихъ черезъ точку B проведемъ по прямой, перпендикулярной къ AB. Пусть это будутъ BC, BD, BE... Черезъ двѣ изъ нихъ, напр. черезъ BC и BD, вообразимъ плоскость M. Эта плоскость перпендикулярна къ AB (**312**). Чтобы доказать, что она содержитъ въ себѣ всѣ прочія изъ проведенныхъ нами перпендикулярныхъ линій, вообразимъ, что какая-нибудь изъ нихъ, напр., линія BE, не лежитъ въ плоскости M; тогда на плоскости R къ AB черезъ точку B можно провести два перпендикуляра: одинъ BE, а другой пересѣченіе плоскостей R и M; такъ какъ это невозможно, то прямая BE и всякая другая, перпендикулярная къ AB въ точкѣ B, должна лежать на плоскости M.



Черт. 223

315. Теорема. *Изъ всякой точки (O, черт. 224) плоскости (M) можно возставить къ этой плоскости перпендикуляръ и притомъ только одинъ.*

Возьмемъ какую-нибудь прямую AB и черезъ произвольную ея точку B проведемъ къ ней



Черт. 224

перпендикулярную плоскость R. Совмѣстимъ эту плоскость съ плоскостью M такъ, чтобы точка B совпала съ O. Тогда прямая BA, занявъ нѣкоторое положеніе OK, будетъ перпендикулярна къ M въ точкѣ O. Чтобы доказать теперь, что этотъ перпендикуляръ *единственный*, предположимъ, что прямая OK_1 будетъ другимъ перпендикуляромъ къ M. Проведемъ черезъ OK и OK_1 плоскость и возьмемъ ея пересѣченіе OL съ плоскостью M. Тогда углы KOL и K_1OL должны быть оба прямые; но это невозможно, такъ какъ одинъ изъ нихъ составляетъ часть другого; значитъ, другого перпендикуляра къ M въ точкѣ Q возставить нельзя.

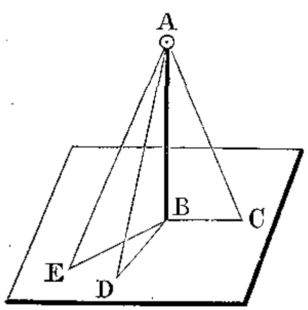
316. Когда изъ одной точки A (черт. 225) проведены къ плоскости перпендикуляръ AB и наклонная AC, условимся разстояніе BC между ихъ основаніями называть *проекціей* наклонной на плоскость P.

317. Теоремы. *Если изъ одной точки* (A, черт. 225) *проведены къ плоскости перпендикуляръ* (AB) *и наклонныя* (AC, AD, AE..), *то:*

1°, *перпендикуляръ короче всякой наклонной;*

2°, *двѣ наклонныя, имѣющія равныя проекціи, равны;*

3°, *изъ двухъ наклонныхъ та больше, которой проекція больше.*



Черт. 225

Вращая прямоугольные тр.-ки ABC и ABD вокругъ катета AB, мы можемъ совмѣстить ихъ плоскости съ плоскостью тр.-ка ABE. Тогда всѣ наклонныя будутъ лежать въ одной плоскости съ перпендикуляромъ, и всѣ проекціи расположатся на одной прямой. Такимъ образомъ, доказываемая теорема приводится къ аналогичной теоремѣ планиметріи (**55**).

318. Обратныя теоремы. 1°. *Кратчайшее разстояніе точки отъ плоскости есть перпендикуляръ;*

2°. *Равныя наклонныя имѣютъ равныя проекціи;*

3°. *Изъ двухъ проекцій та больше, которая соотвѣтствуетъ большей наклонной.*

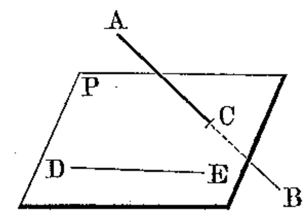
Доказательство (отъ противнаго) предоставляемъ самимъ учащимся.

ГЛАВА III.

Параллельныя прямыя и плоскости.

Параллельныя прямыя.

319. Двѣ прямыя могутъ быть расположены въ пространствѣ такъ, что черезъ нихъ нельзя провести плоскости. Возьмемъ, напр., двѣ такія прямыя AB и DE, изъ которыхъ одна пересѣкаетъ плоскость P, а другая лежитъ въ ней, но не проходитъ черезъ точку пересѣченія C. Черезъ такія двѣ прямыя нельзя провести плоскости, потому что въ противномъ случаѣ черезъ прямую DE и точку C проходили бы двѣ различныя плоскости: одна P, пересѣкающая прямую AB, и другая, содержащая ее; а это невозможно (**308**,1°).



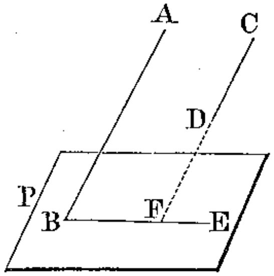
Черт. 226

Двѣ прямыя, не лежащія въ одной плоскости, конечно, не пересѣкаются, сколько бы ихъ не продолжали; однако ихъ не называютъ параллельными, оставляя это названіе только для такихъ прямыхъ, которыя, *находясь въ одной плоскости*, не пересѣкаются, сколько бы ихъ не продолжали.

Въ планиметріи мы видѣли (**69** и **72**), что черезъ всякую точку *плоскости* можно провести прямую, и притомъ только одну, параллельную данной прямой. То же самое можно сказать о всякой точкѣ *пространства*, потому что черезъ точку и данную прямую можно провести плоскость и только одну.

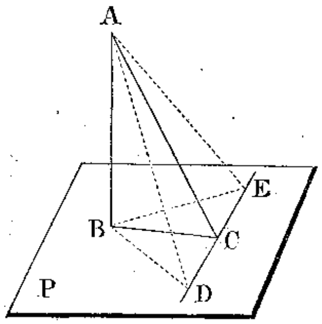
320. Теорема. *Плоскость* (P, черт. 227), *пересѣкающая одну изъ параллельныхъ прямыхъ* (AB), *пересѣкаетъ и другую* (CD).

Проведемъ черезъ AB и CD плоскость. Эта плоскость содержитъ въ себѣ ту точку B, въ которой прямая AB пересѣкается съ P; значитъ, эта плоскость пересѣкается съ P по нѣкоторой прямой BE (**309**). Эта прямая, находясь въ одной плоскости съ AB и CD и пересѣкая одну изъ этихъ параллельныхъ, должна пересѣчь и другую (**73**) въ нѣкоторой точкѣ F. Точка F, находясь заразъ на прямой BE и на прямой CD, должна быть точкою пересѣченія плоскости P съ прямой CD.



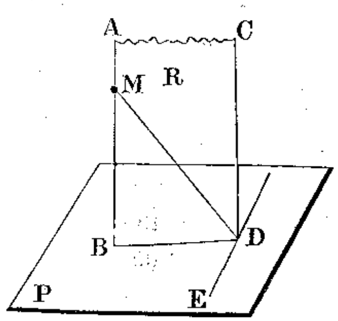
Черт. 227

321. Лемма. *Прямая* (DE, черт. 228), *проведенная на плоскости* (P) *черезъ основаніе наклонной* (AC) *перпендикулярно къ ея проекціи* (BC), *перпендикулярна и къ самой наклонной.*



Черт. 228

Отложимъ произвольныя, но равныя, части CD и CE ~~и~~ соединимъ точки A и B съ D и E. Тогда будемъ имѣть: $BD=BE$, какъ наклонныя къ DE, одинаково удаленныя отъ основанія перпендикуляра BC; $AD=AE$, какъ наклонныя къ плоскости P, имѣющія равныя проекціи BD и BE. Вслѣдствіе этого $\triangle ADE$ есть равнобедренный, и потому его медіана AC перпендикулярна къ основанію DE (**38**).



Черт. 229

322. Теорема. *Плоскость* (P, черт. 229), *перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ прямыхъ* (AB), *перпендикулярна и къ другой* (CD).

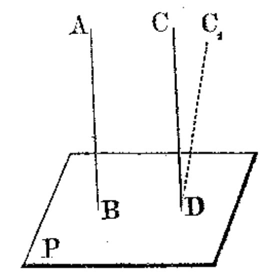
Предстоитъ доказать, что во 1° прямая CD пересѣкается съ P, а во 2° эта прямая перпендикулярна къ какимъ-нибудь двумъ прямымъ, проведеннымъ на плоскости P черезъ основаніе CD.

1°. Плоскость P должна пересѣчь CD, потому что она, по условію, пересѣкаетъ прямую AB, параллельную CD.

2°. Проведемъ черезъ AB и CD плоскость R и возьмемъ ея пересѣченіе BD съ плоскостью P. Такъ какъ, по условію, AB перпендикулярна къ P, то $AB \perp BD$; поэтому и $CD \perp BD$ (**74**). Проведемъ на плоскости P прямую DE, перпендикулярную къ BD, и возьмемъ какую-нибудь наклонную MD, для которой проекціей служитъ BD. Прямая ED, будучи перпендикулярна къ проекціи BD, должна быть перпендикулярна и къ наклонной MD (**321**) и, слѣд., перпендикулярна къ плоскости R (**312**), значитъ, и къ прямой CD. Такимъ образомъ, прямая CD оказывается перпендикулярною къ двумъ прямымъ плоскости P, именно къ DB и DE; слѣд., она перпендикулярна къ этой плоскости.

323. Обратная теорема. *Два перпендикуляра* (AB и CD, черт. 230) *къ одной плоскости* (P) *параллельны.*

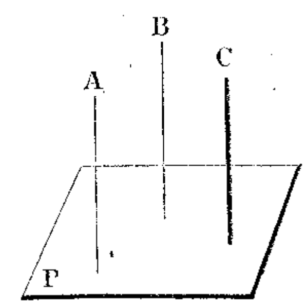
Предположимъ, что линіей, параллельной AB и проходящей черезъ точку D, будетъ не CD, а какая-нибудь иная прямая C_1D. Тогда, согласно прямой теоремѣ, C_1D будетъ перпендикуляромъ къ P, что невозможно, такъ какъ перпендикуляромъ къ P, по условію, служитъ CD.



Черт. 220

324. Слѣдствіе. *Изъ всякой точки* (A, черт. 230) *внѣ плоскости* (P) *можно опустить на эту плоскость перпендикуляръ и притомъ только одинъ.*

Дѣйствительно, всегда возможно изъ какой-нибудь точки D плоскости P возставить къ ней перпендикуляръ DC (**315**) и затѣмъ черезъ A провести $AB \parallel CD$. Прямая AB будетъ перпендикуляромъ къ P (**322**). Другого перпендикуляра изъ точки A опустить нельзя, потому что перпендикуляръ къ P дол-



Черт. 231

женъ быть параллеленъ DC (**323**), а черезъ A можно провести только одну прямую, параллельную DC.

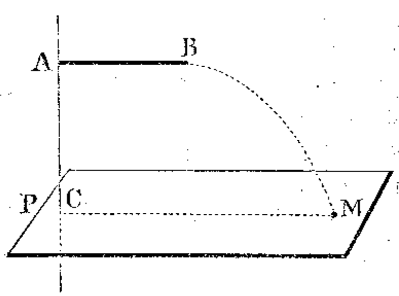
325. Теорема. *Двѣ прямыя (A и B,* черт. 231), *параллельныя третьей прямой (C), параллельны между собою.*

Проведемъ плоскость P, перпендикулярную къ C. Тогда A и B будутъ перпендикулярами къ этой плоскости (**322**), и, слѣд., $A \parallel B$ (**323**).

Прямыя, параллельныя плоскости.

326. Опредѣленіе. Прямая и плоскость наз. *параллельными,* если онѣ не пересѣкаются, сколько бы ихъ не продолжали.

Слѣдующія двѣ теоремы выражаютъ *признаки* параллельности прямой съ плоскостью.

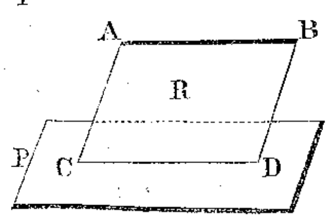


Черт. 232

327. Теорема 1. *Прямая (AB,* черт. 232), *и плоскость* (P), *перпендикулярныя къ одной и той же прямой (AC), параллельны.*

Предположимъ, что AB пересѣкается съ P въ точкѣ M; тогда, соединивъ M съ C, мы будемъ имѣть два перпендикуляра MC и MA на прямую AC изъ одной точки M, что невозможно; значитъ, AB не пересѣкается съ P, т.-е. AB параллельна P.

Теорема 2. *Прямая (AB,* черт. 233), *параллельная какой-нибудь прямой (CD), проведенной на плоскости* (P), *параллельна самой плоскости.*



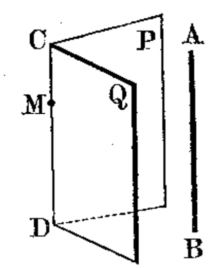
Черт. 233

Проведемъ черезъ AB и CD плоскость R. Такъ какъ прямая AB на всемъ протяженіи лежитъ на плоскости R, то она могла бы пересѣчься съ плоскостью P не иначе, какъ пересѣкаясь съ прямой CD, что невозможно по условію. Значитъ, AB не пересѣкается съ P, т.-е. AB параллельна P.

328. Теорема. *Если плоскость (R,* черт. 233) *проходитъ черезъ прямую (AB), параллельную другой плоскости (P), и пересѣкаетъ эту плоскость, то линія пересѣченія (CD) параллельна первой прямой (AB).*

Дѣйствительно, во 1°, CD лежитъ въ одной плоскости съ AB; во 2°, CD не можетъ пересѣчься съ AB, потому что въ противномъ случаѣ AB пересѣкалась бы съ P, что невозможно.

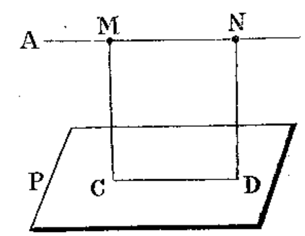
Слѣдствіе. *Прямая (AB,* черт. 234), *параллельная двумъ пересѣкающимся плоскостямъ (P и Q), параллельна линіи ихъ пересѣченія.*



Черт. 234

Вообразимъ плоскость черезъ AB и какую-нибудь точку M прямой CD. Эта плоскость должна пересѣчься съ P и Q по прямымъ, параллельнымъ AB, и проходящимъ черезъ M. Но черезъ M можно провести только одну прямую, параллельную AB; значитъ, два пересѣченія воображаемой плоскости съ плоскостями P и Q должны слиться въ одну прямую, которая не можетъ быть иною, какъ CD; слѣд., $CD \parallel AB$.

329. Теорема. *Всѣ точки прямой (AB,* черт. 235), *параллельной плоскости (P), одинаково удалены отъ этой плоскости.*

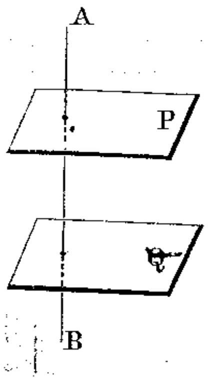


Черт. 235

Изъ двухъ какихъ-нибудь точекъ M и N прямой AB опустимъ на P перпендикуляры MC и ND. Такъ какъ эти перпендикуляры параллельны (**323**), то черезъ нихъ можно провести плоскость. Эта плоскость пересѣчется съ P по прямой CD, параллельной AB (**328**); поэтому фигура $MNDC$ будетъ параллелограммъ и, слѣд., $MC = ND$.

Параллельныя плоскости.

330. Опредѣленіе. Двѣ плоскости наз. *параллельными*, если онѣ не пересѣкаются, сколько бы ихъ не продолжали.



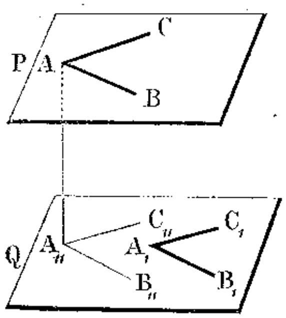
Черт. 236

Слѣдующія двѣ теоремы выражаютъ *признаки* параллельности двухъ плоскостей.

331. Теорема 1. *Двѣ плоскости* (P и Q, черт. 236), *перпендикулярныя къ одной и той же прямой* (AB), *параллельны.*

Если бы плоскости P и Q пересѣкались, то черезъ всякую точку ихъ пересѣченія проходили бы двѣ плоскости P и Q, перпендикулярныя къ прямой AB, что невозможно.

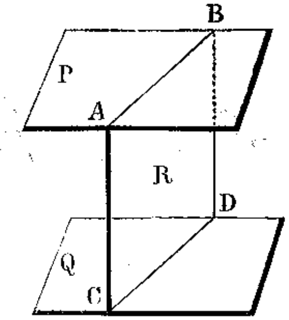
Теорема 2. *Двѣ плоскости* (P и Q, черт. 237), *параллельны, если двѣ пересѣкающіяся прямыя одной изъ нихъ* (AB и AC) *соотвѣтственно параллельны двумъ пересѣкающимся прямымъ другой* (A_1B_1 и A_1C_1).



Черт. 237

Изъ точки A опустимъ на плоскость Q перпендикуляръ AA_{11} и проведемъ прямыя $A_{11}B_{11}$ и $A_{11}C_{11}$, соотвѣтственно параллельныя прямымъ A_1B_1 и A_1C_1; тогда эти прямыя будутъ также параллельны и линіямъ AB и AC (**325**). Такъ какъ $AA_{11} \perp A_{11}B_{11}$ и и $AB \parallel A_{11}B_{11}$, то $AA_{11} \perp AB$; по той же причинѣ $AA_{11} \perp AC$. Слѣд., прямая AA_{11} перпендикулярна къ плоскости P (**312**). Такимъ образомъ, плоскости P и Q перпендикулярны къ прямой AA_{11} и потому параллельны.

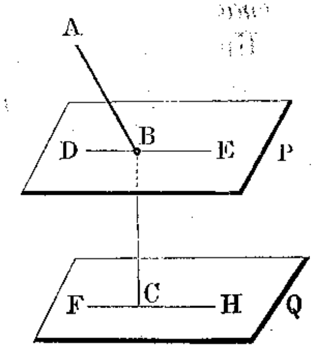
332. Теорема. *Если двѣ параллельныя плоскости* (P и Q, черт. 238) *пересѣкаются третьею плоскостью* (R), *то линіи пересѣченія* (AB и CD) *параллельны.*



Черт. 238

Дѣйствительно, прямыя AB и CD, находясь въ одной плоскости R, не могутъ пересѣчься, такъ какъ въ противномъ случаѣ пересѣкались-бы плоскости P и Q, что противорѣчитъ условію.

333. Теорема. *Прямая или плоскость, пересѣкающая одну изъ параллельныхъ плоскостей, пересѣкаетъ и другую.*



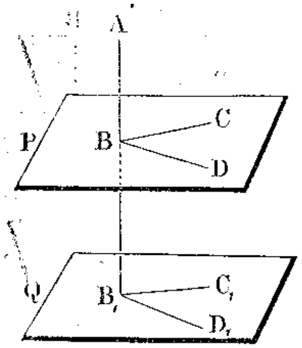
Черт. 239

1°. Пусть прямая AB пересѣкаетъ въ точкѣ B плоскость P, параллельную Q. Опустимъ изъ B на Q перпендикуляръ BC и черезъ AB и BC проведемъ плоскость. Эта плоскость, содержа въ себѣ точки B и C, пересѣкается съ P и Q по нѣкоторымъ прямымъ DE и FH, которыя параллельны (**332**). Прямая AB лежитъ въ одной плоскости съ DE и FH и пересѣкаетъ одну изъ этихъ параллельныхъ; слѣд., какъ мы знаемъ изъ планиметріи (**73**,1°), она пересѣчетъ и другую; значитъ, пересѣчетъ и плоскость Q.

2°. Пусть какая-нибудь плоскость пересѣкаетъ плоскость P (черт. 239), параллельную Q. Тогда на ней можно взять прямую AB, которая тоже пересѣкаетъ плоскость P; по доказанному, эта прямая пересѣчетъ и плоскость Q; значитъ, съ этою плоскостью пересѣчется и та плоскость, въ которой взята AB.

334. Теорема. *Прямая* (AB, черт. 240), *перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ плоскостей* (къ P), *перпендикулярна и къ другой* (къ Q).

Прямая AB, пересѣкая одну изъ параллельныхъ плоскостей, пересѣчетъ и другую въ нѣкоторой точкѣ B_1. Проведемъ черезъ AB какія-нибудь двѣ плоскости, которыя пересѣкутся съ P и Q по параллельнымъ прямымъ: одна по BC и B_1C_1, другая по BD и B_1D_1. Согласно условію, прямая AB перпендикулярна къ BC и BD; слѣд., она также перпендикулярна къ B_1C_1 и B_1D_1, а потому перпендикулярна и къ плоскости Q.

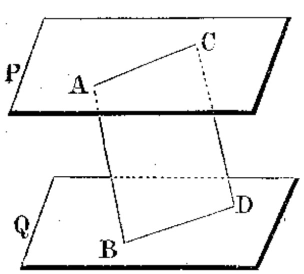


Черт 240

335. Слѣдствіе. *Черезъ всякую точку* (B, черт. 240) *пространства можно провести плоскость* (P), *параллельную данной плоскости* (Q), *и притомъ только одну.*

Предоставляемъ учащимся самимъ доказать это слѣдствіе, на основаніи теоремъ §§ 331 и 334.

336. Теорема. *Отрѣзки параллельныхъ прямыхъ* (AB и CD, черт. 241), *заключенные между параллельными плоскостями* (P и Q), *равны.*



Черт. 241

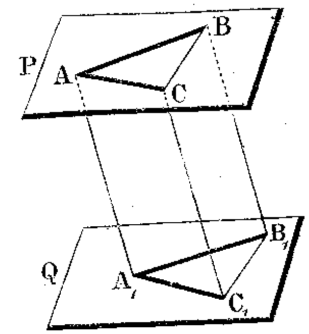
Черезъ параллельныя прямыя AB и CD проведемъ плоскость; она пересѣчетъ Q и P по параллельнымъ прямымъ BD и AC; слѣд., фигура $ABDC$ будетъ параллелограммъ и потому $AB = CD$.

337. Слѣдствіе. *Параллельныя плоскости вездѣ одинаково удалены одна отъ другой,* потому что, когда параллельныя прямыя AB и CD (черт. 241) перпендикулярны къ P, онѣ будутъ также перпендикулярны къ Q и въ то же время равны.

338. Теорема. *Два угла* (BAC и $B_1A_1C_1$, черт. 242) *съ соотвѣтственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны и лежатъ въ параллельныхъ плоскостяхъ* (P и Q).

Что плоскости P и Q параллельны, было доказано выше (**331**, 2°); остается доказать, что углы A и A_1 равны. —

Отложимъ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и проведемъ AA_1, BB_1, CC_1, BC и B_1C_1. Такъ какъ отрѣзки AB и A_1B_1 равны и параллельны, то фигура ABB_1A_1 есть параллелограммъ (**97**,2°); поэтому отрѣзки AA_1 и BB_1 равны и параллельны. По той же причинѣ равны и параллельны отрѣзки AA_1 и CC_1; слѣд., $BB_1 = CC_1$ и $BB_1 \parallel CC_1$. Поэтому $BC = B_1C_1$ и $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (по тремъ сторонамъ); значитъ, $\angle A = \angle A_1$.



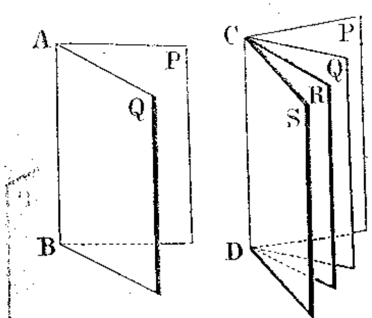
Черт. 242

ГЛАВА IV.

Двугранные углы.

339. Опредѣленія. Двѣ плоскости P и Q, исходящія изъ одной прямой AB, образуютъ *двугранный уголъ*.

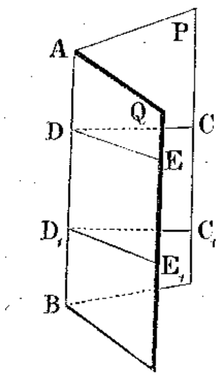
Прямая AB наз. *ребромъ*, а плоскости P и Q — сторонами или *гранями* двуграннаго угла. Такой уголъ обозначается обыкновенно двумя буквами, поставленными у его ребра (двугр. уголъ AB). Но если при одномъ ребрѣ лежатъ нѣсколько двугр. угловъ, то каждый изъ нихъ обозначаютъ 4-мя буквами, изъ которыхъ двѣ среднія стоятъ при ребрѣ, а двѣ крайнія у граней (напр., двугр. уголъ $SCDQ$).



Черт. 243

Если изъ произвольной точки D ребра AB (черт. 244) проведемъ на каждой грани по перпендикуляру къ ребру, то образованный ими уголъ CDE наз. *линейнымъ* угломъ двуграннаго. Величина линейнаго угла не зависитъ отъ положенія точки D на ребрѣ. Такъ, линейные углы CDE и $C_1D_1E_1$

равны, потому что ихъ стороны соотвѣтственно параллельны и одинаково направлены.



Черт. 244

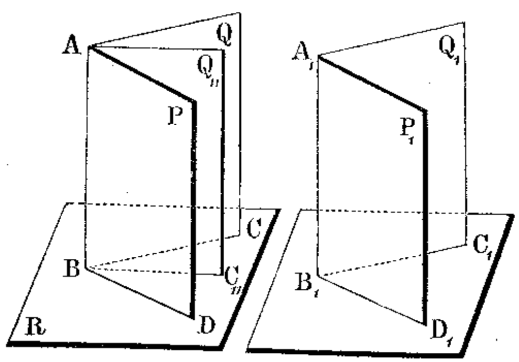
Не трудно видѣть, что плоскость линейнаго угла перпендикулярна къ ребру (**312**).

340. Равенство двугранныхъ угловъ. Два двугранные угла считаются *равными,* если они при вложеніи совмѣщаются; въ противномъ случаѣ тотъ изъ угловъ считается меньшимъ, который, будучи вложенъ въ другой такъ, чтобы у нихъ совпали ребра, составитъ часть этого другого угла.

Такъ какъ двугранный уголъ есть величина, то можно разсматривать сумму, разность, произведеніе и частное двугранныхъ угловъ въ томъ же смыслѣ, какъ и для угловъ планиметріи. Подобно этимъ угламъ двугранные углы могутъ быть *смежные, прямые, вертикальные...*

341. Теоремы. 1°. *Равнымъ двуграннымъ угламъ соотвѣтствуютъ равные линейные углы.*

2°. *Большему двугранному углу соотвѣтствуетъ большій линейный уголъ.*



Черт. 245

Пусть $PABQ$ и $P_1A_1B_1Q_1$ будутъ двугранные углы съ линейными углами CBD и $C_1B_1D_1$. Вложимъ уголъ A_1B_1 въ уголъ AB такъ, чтобы у нихъ совпали: во 1, точки B и B_1, во 2, ребра A_1B_1 и AB, и въ 3, грани P_1 и P.

При этомъ также совпадутъ и плоскости линейныхъ угловъ, такъ какъ онѣ перпендикулярны къ одной прямой въ одной точкѣ. Положимъ, теперь, что наши двугранные углы равны; тогда грань Q_1 совпадетъ съ Q и, слѣд., уголъ $C_1B_1D_1$ совмѣстится съ угломъ CBD, т.-е. эти линейные углы окажутся равными. Если же двугранные углы неравны, напр. уголъ A_1B_1 меньше угла AB, то грань Q_1 пойдетъ внутри угла AB, напр., займетъ положеніе Q_{11}. Тогда линейный уголъ $C_1B_1D_1$ займетъ положеніе $C_{11}BD$ и, слѣд., будетъ меньше линейнаго угла CBD.

342. Обратныя теоремы. 1°. *Равнымъ линейнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равные двугранные углы.*

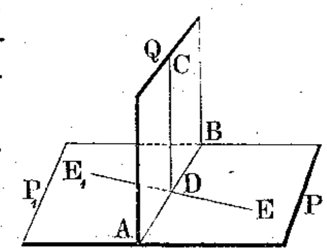
2°. *Большему линейному углу соотвѣтствуетъ большій двугранный уголъ.*

Эти теоремы легко доказываются отъ противнаго (**48**).

343. Замѣчаніе. Наложеніе, или, лучше сказать, *вложеніе* одной фигуры въ другую, часто употребляемое въ стереометріи, всегда можетъ быть выполняемо въ такой послѣдовательности: во 1°, совмѣщаемъ какія-нибудь двѣ точки фигуръ; во 2°, какія-нибудь двѣ прямыя, исходящія изъ совпавшихъ точекъ и въ 3°, какія-нибудь двѣ плоскости, исходящія изъ совпавшихъ прямыхъ. Совмѣстятся ли при этомъ другіе элементы фигуръ, зависитъ отъ свойствъ ихъ.

344. Слѣдствія. 1°. *Прямому двугранному углу соотвѣтствуетъ прямой линейный уголъ и обратно.*

Пусть уголъ $PABQ$ будетъ прямой. Это значитъ, что онъ равенъ смежному углу $QABP_1$. Но въ такомъ случаѣ линейные углы CDE и CDE_1 также равны; а такъ какъ они смежные, то каждый изъ нихъ долженъ быть прямой. Обратно, если равны смежные линейные углы CDE и CDE_1, то равны и смежные двугр. углы, т.-е. каждый изъ нихъ долженъ быть прямой.



Черт. 246

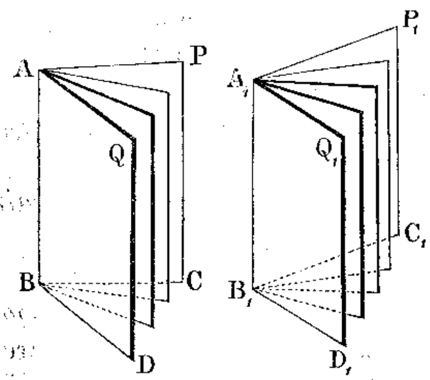
2°. *Прямые двугранные углы равны,* потому что у нихъ равны линейные углы. По той же причинѣ:

3°. *Вертикальные двугранные углы равны.*

4°. *Двугранные углы съ соотвѣтственно параллельными и одинаково направленными гранями равны.*

345. Теорема. *Двугранные углы относятся, какъ ихъ линейные углы.*

При доказательствѣ разсмотримъ особо два случая:



Черт 247

1° *Линейные углы CBD и $C_1B_1D_1$ соизмѣримы.* Пусть ихъ общая мѣра содержится въ первомъ углѣ m разъ, а во второмъ n разъ. Проведемъ черезъ ребра и прямыя, дѣлящія линейные углы на равныя части, рядъ плоскостей; тогда мы раздѣлимъ уголъ AB на m, а уголъ A_1B_1 на n частей, которыя всѣ равны между собою (вслѣдствіе равенства линейныхъ угловъ).

Поэтому:

$$\frac{\angle CBD}{\angle C_1B_1D_1}=\frac{m}{n} \text{ и } \frac{\text{дв. уг. } AB}{\text{дв. уг. } A_1B_1}=\frac{m}{n}$$

$$\text{Откуда: } \frac{\text{дв. уг. } AB}{\text{дв. уг. } A_1B_1}=\frac{\angle CBD}{\angle C_1B_1D_1}$$

2° *Линейные углы несоизмѣримы.* Раздѣлимъ уголъ $C_1B_1D_1$ на n равныхъ частей. Пусть $^1/_n$ этого угла содержится въ углѣ CBD болѣе m, но менѣе $m+1$ разъ. Тогда приближенное отношеніе угловъ CBD и $C_1B_1D_1$, съ точностью до $^1/_n$, будетъ равно $^m/_n$. Проведя плоскости такъ же, какъ и въ первомъ случаѣ, найдемъ, что приближенное отношеніе двугранныхъ угловъ AB и A_1B_1, съ точностью до $^1/_n$, также равно $^m/_n$. Такимъ образомъ, приближенныя отношенія оказываются равными при всякомъ n; а въ этомъ и состоитъ равенство несоизмѣримыхъ отношеній.

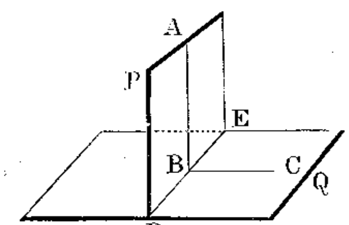
346. Слѣдствіе. Если за единицу двугранныхъ угловъ взять такой уголъ, который соотвѣтствуетъ единицѣ линейныхъ угловъ, то можно сказать, что *двугранный уголъ измѣряется его линейнымъ угломъ.*

Перпендикулярныя плоскости.

347. Опредѣленіе. Двѣ плоскости наз. взаимно *перпендикулярными*, если пересѣкаясь, онѣ образуютъ прямые двугранные углы.

348. Теорема. *Плоскость (P,* чер. 248*), проходящая черезъ перпендикуляръ (AB) къ другой плоскости (Q), перпендикулярна къ ней.*

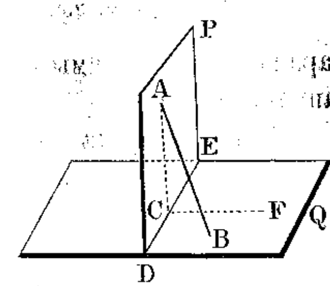
Проведемъ на плоскости Q прямую BC, перпендикулярную къ DE. Тогда уг. ABC будетъ линейнымъ двугр. угла $PDEQ$. Такъ какъ AB, по условію, перпендикулярна къ Q, то $AB \perp BC$; значитъ, уг. ABC прямой, а потому и двугр. уголъ прямой, т. е. пл. P перпендикулярна къ Q.



Черт. 248.

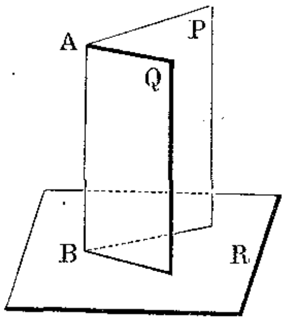
349. Обратная теорема. *Перпендикуляръ (AB,* чер. 249*), имѣющій общую точку (A) съ одною изъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостей (P и Q), лежитъ весь въ этой плоскости.*

Предположимъ, что AB не лежитъ въ плоскости P (какъ изображено у насъ на чертежѣ). Проведемъ на пл. P изъ точки A прямую AC, перпендикулярную къ DE, и на пл. Q изъ точки C прямую CF, перпендикулярную къ DE. Тогда уголъ ACF, какъ линейный уголъ прямого двугр. угла, будетъ прямой. Поэтому линія AC, образуя прямые углы съ CD и CF, будетъ перпендикуляромъ къ



Черт. 249

пл. Q. Но изъ точки A нельзя опустить на плоскость Q двухъ различныхъ перпендикуляровъ; значитъ, AB сливается съ AC.



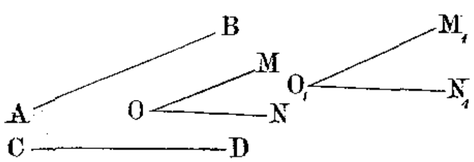
Черт. 251

350. Теорема. *Пересѣченіе* (AB, черт. 251) *двухъ плоскостей* (P и Q), *перпендикулярныхъ къ третьей плоскости* (R), *есть перпендикуляръ къ этой плоскости.*

Черезъ какую-нибудь точку A линіи пересѣченія вообразимъ перпендикуляръ къ пл. R. Этотъ перпендикуляръ долженъ лежать и въ пл. Q (**349**), и въ пл. R; значитъ, онъ сольется съ AB.

Уголъ двухъ непересѣкающихся прямыхъ.

351. Опредѣленіе. Угломъ двухъ непересѣкающихся прямыхъ AB и CD, которыхъ дано положеніе и направленіе, наз. уголъ MON, который получится, *если* изъ произвольной точки пространства O проведемъ прямыя OM и ON, соотвѣтственно параллельныя прямымъ AB и CD и одинаково съ ними направленныя.

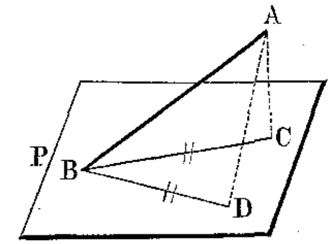


Черт. 252

Величина угла MON не зависитъ отъ положенія точки O. Въ самомъ дѣлѣ, если построимъ указаннымъ путемъ уголъ $M_1O_1N_1$ при какой-нибудь другой точкѣ O_1, то $MON = M_1O_1N_1$, такъ какъ эти углы имѣютъ соотвѣтственно параллельныя и одинаково направленныя стороны.

Уголъ прямой съ плоскостью.

352. Опредѣленіе. Когда прямая AB наклонна къ плоскости P, то уголъ ея съ этою плоскостью называютъ уголъ ABC, составленный наклонною AB съ ея проекціей BC.



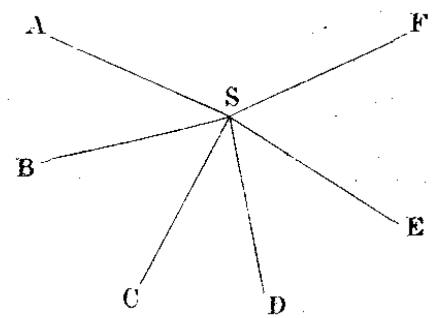
Черт. 253

Этотъ уголъ есть *наименьшій* изъ всѣхъ угловъ, которые наклонная образуетъ съ прямыми, проведенными на плоскости P черезъ основаніе наклонной. Докажемъ, напр., что $\angle ABC$ меньше $\angle ABD$. Для этого отложимъ $BD = BC$ и соединимъ D съ A. У тр.-ковъ ABC и ABD двѣ стороны одного равны соотвѣтственно двумъ сторонамъ другого, но третьи стороны не равны, а именно $AD > AC$ (наклонная больше перпендикуляра). Вслѣдствіе этого $\angle ABD$ больше $\angle ABC$ (**54**).

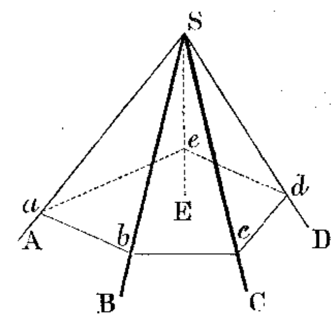
ГЛАВА V.

Многогранные углы.

353. Опредѣленія. Возьмемъ нѣсколько угловъ (черт. 254): ASB, BSC, CSD...., которые расположены въ одной



Черт. 254



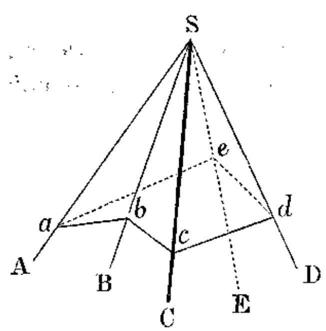
Черт. 255

плоскости вокругъ общей вершины S. Повернемъ уголъ ASB

вокругъ общей стороны SB такъ, чтобы плоскость ASB составила нѣкоторый двугранный уголъ съ пл. BSC. Затѣмъ, не измѣняя получившагося двуграннаго угла, повернемъ его вокругъ прямой SC такъ, чтобы пл. BSC составила нѣкоторый двугр. уголъ съ пл. CSD. Продолжаемъ такое послѣдовательное вращеніе вокругъ каждой общей стороны. Если при этомъ послѣдняя сторона SF совмѣстится съ первою стороною SA, то образуется фигура (черт. 255), называемая *многограннымъ угломъ*. Углы ASB, BSC... наз. *плоскими* углами или *гранями*, стороны ихъ SA, SB... наз. *ребрами*, а общая вершина S — *вершиною* многограннаго угла. Каждому ребру соотвѣтствуетъ двугр. уголъ; поэтому въ многогранномъ углѣ столько двугранныхъ угловъ и столько плоскихъ, сколько въ немъ всѣхъ реберъ. Наименьшее число граней въ многогр. углѣ три; такой уголъ наз. *трегранными*. Могутъ быть углы четырегранные, пятигранные и т. д.

Многогранный уголъ (черт. 255) обозначается или одною буквою S, поставленною у вершины, или же рядомъ буквъ $SABCDE$, изъ которыхъ первая обозначаетъ вершину, а прочія — ребра по порядку ихъ расположенія.

Многогранный уголъ наз. *выпуклымъ*, если онъ весь расположенъ по одну сторону отъ каждой своей грани. Таковъ уголъ, изображенный на черт. 255. Наоборотъ, уголъ на черт. 256 нельзя назвать выпуклымъ, такъ какъ онъ расположенъ по обѣ стороны отъ грани ASB, или грани BSC. Если всѣ грани многогр. угла пересѣчь плоскостью, то въ сѣченіи образуется многоугольникъ ($abcde$, черт. 255 и 256). Въ выпукломъ углѣ этотъ многоугольникъ тоже выпуклый.



Черт. 256

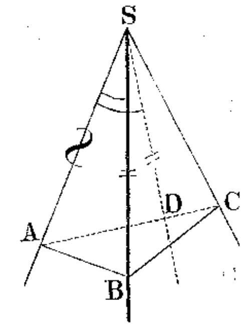
Мы будемъ разсматривать только выпуклые многогранные углы.

354. Теорема. *Въ трегранномъ углѣ каждый плоскій уголъ меньше суммы двухъ другихъ плоскихъ угловъ.*

Пусть въ углѣ $SABC$ *наибольшій* изъ плоскихъ угловъ

будетъ ASC. Докажемъ, что даже этотъ наибольшій уголъ меньше суммы двухъ остальныхъ. Отложимъ на углѣ ASC часть ASD, равную ASB. Проведемъ въ плоскости угла ASC какую нибудь прямую AC, пересѣкающую SD въ точкѣ D. Отложимъ $SB{=}SD$. Соединивъ B съ A и C, получимъ $\triangle ACB$, въ которомъ:

$$AD+DC<AB+BC$$



Черт. 257

Тр.-ки ASD и ASB равны, такъ какъ они содержатъ по равному углу, заключенному между равными сторонами; слѣд. $AD=$ $=AB$. Поэтому въ выведенномъ неравенствѣ можно отбросить равныя части AD и AB, послѣ чего получимъ:

$$DC<BC$$

Теперь замѣчаемъ, что у тр.-ковъ SCD и SCB двѣ стороны одного равны двумъ сторонамъ другого, а третьи стороны неравны; въ такомъ случаѣ противъ бо́льшей изъ этихъ сторонъ лежитъ бо́льшій уголъ; значитъ:

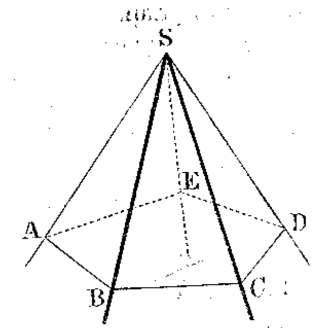
$$\text{уголъ } CSD<\text{угла } CSB$$

Приложивъ къ лѣвой части этого неравенства уголъ ASD, а къ правой равный ему уголъ ASB, получимъ неравенство, которое требовалось доказать:

$$\text{уг. } ASC<\text{уг. } ASB+\text{уг. } CSB.$$

355. Теорема. *Въ выпукломъ многогранномъ углѣ сумма плоскихъ угловъ меньше $4d$.*

Пересѣчемъ грани выпуклаго угла $SABCDE$ какою-нибудь плоскостью; отъ этого въ сѣченіи получимъ выпуклый n-угольникъ $ABCDE$. Примѣняя теорему предыдущаго параграфа къ каждому изъ трегранныхъ угловъ, образовавшихся при точкахъ A, B, C, D и E, находимъ:



Черт. 258

$$ABC<ABS+SBC;\ BCD<BCS+SCD;\ldots\ldots$$

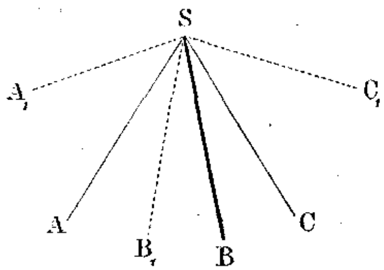
Сложимъ почленно всѣ эти неравенства. Тогда въ лѣвой части получимъ сумму всѣхъ угловъ многоугольника $ABCDE$, которая равна $2dn-4d$ (**85**), а въ правой — сумму угловъ тр.-ковъ ASB, BSC...., кромѣ тѣхъ угловъ, которые лежатъ при вершинѣ S. Обозначая сумму этихъ послѣднихъ угловъ буквою x, мы получимъ послѣ сложенія:

$$2dn-4d<2dn-x$$

Откуда:
$$x<4d$$

Равенство трегранныхъ угловъ.

356. Дополнительный уголъ. Изъ вершины S трегранного угла $SABC$ возставимъ къ грани ASB перпендикуляръ SC_1, направляя его въ ту сторону отъ этой грани, въ которой расположено противоположное ребро SC. Подобно этому проведемъ перпендикуляръ SA_1 къ грани BSC и SB_1, къ грани ASC. Трегранный уголъ, у котораго ребрами служатъ прямыя SA_1, SB_1 и SC_1, наз. *дополнительнымъ* для угла $SABC$.



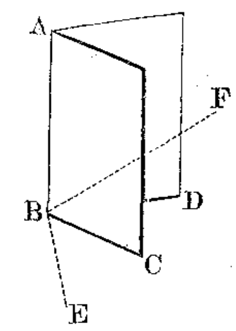
Черт. 259

Замѣтимъ, что если для угла $SABC$ дополнительнымъ служитъ уг. $SA_1B_1C_1$, то и наоборотъ: для уг. $SA_1B_1C_1$ дополнительнымъ угломъ будетъ $SABC$. Дѣйствительно, плоскость SA_1B_1, проходя черезъ перпендикуляры къ плоскостямъ BSC и ASC, перпендикулярна къ нимъ обѣимъ, а слѣд. и къ линіи ихъ пересѣченія SC; значитъ, прямая SC есть перпендикуляръ къ грани SA_1B_1 и, кромѣ того, она расположена по ту же сторону отъ этой грани, по которую лежитъ противоположное ребро SC_1. Подобно этому убѣдимся, что прямыя SB и SA соотвѣтственно перпендикулярны къ гранямъ SA_1C_1 и SB_1C_1 и расположены по ту сторону отъ нихъ, по которую лежатъ ребра SB_1 и SA_1. Значитъ, углы $SABC$ и $SA_1B_1C_1$ *взаимно дополнительны.*

357. Лемма I. *Если два трегранные угла взаимно дополнительны, то плоскіе углы одного служатъ дополненіемъ до 2d къ противоположнымъ двуграннымъ угламъ другого.*

Каждый плоскій уголъ одного изъ взаимно дополнительныхъ трегранныхъ угловъ образованъ двумя *перпендикулярами,* возстановленными къ

гранямъ противоположнаго двуграннаго угла другого трегранного, изъ одной точки его ребра. Замѣтивъ это и принявъ во вниманіе направленіе перпендикуляровъ, возьмемъ какой-нибудь двугранный уголъ AB и изъ произвольной точки B его ребра возставимъ перпендикуляры: BE къ грани AD и BF къ грани AC и затѣмъ черезъ BE и BF вообразимъ плоскость, которая должна быть перпендикулярна къ ребру AB (**348,350**). Пусть пересѣченія этой плоскости съ гранями угла AB будутъ прямыя BC и BD. Тогда уголъ CBD долженъ быть линейнымъ угломъ двуграннаго AB. Такъ какъ стороны угла EBF соотвѣтственно перпендикулярны къ сторонамъ угла CBD, и эти углы не равны, то сумма ихъ равна $2d$ (**82**); что и требуется доказать.



Черт. 260

358. Лемма 2. *Равнымъ трегранным угламъ соотвѣтствуютъ равные дополнительные углы и обратно.*

Равные трегранные углы при вложеніи совмѣщаются; поэтому совмѣщаются и тѣ перпендикуляры, которые образуютъ ребра дополнительныхъ угловъ; значитъ, дополнительные углы также совмѣщаются.

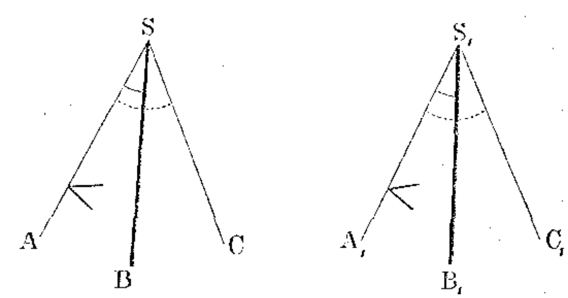
Обратно: если совмѣщаются дополнительные углы, то совмѣщаются и данные углы.

359. Теоремы. *Трегранные углы равны, если они имѣютъ:*

1^0, *по равному двугранному углу, заключенному между двумя соотвѣтственно равными и одинаково расположенными плоскими углами;*

или 2^0, *по равному плоскому углу, заключенному между двумя соотвѣтственно равными и одинаково расположенными двугранными углами;*

или 3^0, *по три соотвѣтственно равныхъ и одинаково расположенныхъ плоскихъ угла;*



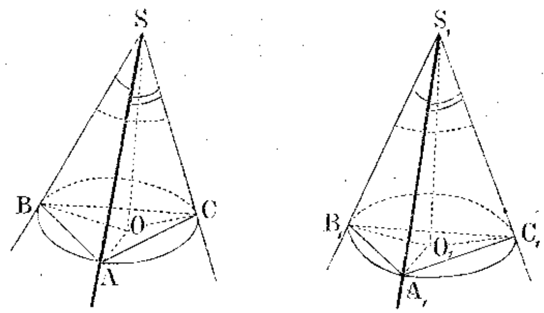
Черт. 261

или 4^0, *по три соотвѣтственно равныхъ и одинаково расположенныхъ двугранныхъ угла.*

1⁰. Пусть S и S_1 два трегранные угла (черт. 261), у которыхъ: $\angle ASB = \angle A_1S_1B_1$, $\angle ASC = \angle A_1S_1C_1$ и двугр. уг. $AS =$ двугр. уг. A_1S_1. Вложимъ уголъ S_1 въ уголъ S такъ, чтобы у нихъ совпали: точка S_1 съ S, прямая S_1A_1 съ SA и плоскость $A_1S_1B_1$ съ ASB. Тогда ребро S_1B_1 пойдетъ по SB (по равенству угловъ $A_1S_1B_1$ и ASB), плоскость $A_1S_1C_1$ пойдетъ по ASC (по равенству двугранныхъ угловъ), и ребро S_1C_1 по SC (по равенству угловъ $A_1S_1C_1$ и ASC). Такимъ образомъ, трегранные углы совмѣстятся во всѣхъ своихъ частяхъ, т.-е. они будутъ равны.

2⁰. Второй признакъ доказывается вложеніемъ подобно первому.

3⁰. Пусть S и S_1 (черт. 262) будутъ два трегранные угла, у которыхъ плоскіе углы одного равны соотвѣтственно плоскимъ угламъ другого, и кромѣ того, равные углы одинаково расположены.



Черт. 262

Отложимъ на всѣхъ ребрахъ произвольные, но равные, отрѣзки: $SA = SB = SC = SA_1 = \ldots$ и построимъ тр.-ки ABC и $A_1B_1C_1$. Изъ равенства тр.-ковъ ABS и $A_1B_1S_1$ находимъ: $AB = A_1B_1$. Подобно этому изъ равенства другихъ боковыхъ тр.-ковъ выводимъ: $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$. Слѣд., $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Опустимъ на плоскости этихъ тр.-ковъ перпендикуляры SO и S_1O_1. Такъ какъ наклонныя SA, SB и SC равны, то должны быть равны ихъ проекціи OA, OB и OC; значитъ, точка O есть центръ круга, описаннаго около тр.-ка ABC. Точно также точка O_1 есть центръ круга, описаннаго около тр.-ка $A_1B_1C_1$. У равныхъ тр.-ковъ радіусы описанныхъ круговъ равны; значитъ, $OB = O_1B_1$. Поэтому $\triangle SBO = \triangle S_1B_1O_1$ (по гипотенузѣ и катету), и, слѣд., $OS = O_1S_1$. Вложимъ теперь фигуру $S_1A_1B_1C_1$ въ фигуру $SABC$ такъ, чтобы равные тр.-ки $A_1B_1C_1$ и ABC совмѣстились; тогда совмѣстятся описанныя окружности, и, слѣд., ихъ центры O_1 и O; вслѣдствіе этого перпендикуляръ O_1S_1 пойдетъ по OS, и точка S_1 упадетъ въ S. Такимъ образомъ трегранные углы совмѣстятся всѣми своими частями, т.-е. они будутъ равны.

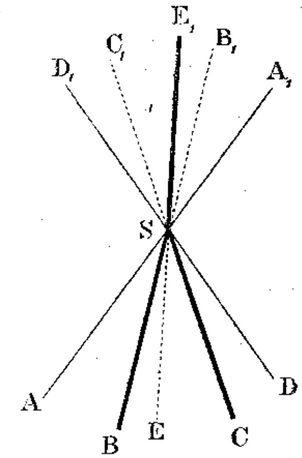
4⁰. Четвертый признакъ легко доказывается при помощи дополнительныхъ угловъ. Если у двухъ трегранныхъ угловъ соотвѣтственно равны и одинаково расположены *двугранные* углы, то у ихъ дополнительныхъ угловъ будутъ соотвѣтственно равны и одинаково расположены *плоскіе*

углы (357); слѣд., дополнительные углы равны; а если равны дополнительные, то равны и данные углы (358).

360. Симметричные многогранные углы. Какъ извѣстно, вертикальные углы равны, если рѣчь идетъ объ углахъ, образованныхъ прямыми или плоскостями.

Посмотримъ, примѣнима ли эта истина къ угламъ многограннымъ.

Продолжимъ всѣ ребра угла $SABCDE$ за вершину; тогда образуемъ другой многогранный уголъ $SA_1B_1C_1D_1E_1$, который можно назвать *вертикальнымъ* по отношенію къ первому углу. Не трудно видѣть, что у обоихъ угловъ равны соотвѣтственно и плоскіе углы, и двугранные; но тѣ и другіе расположены *въ обратномъ порядкѣ*. Дѣйствительно, если мы вообразимъ наблюдателя, который смотритъ извнѣ многограннаго угла на его вершину, то ребра SA, SB, SC, SD, SE будутъ казаться ему расположенными противъ движенія часовой стрѣлки, тогда какъ, смотря на уголъ $SA_1B_1C_1D_1E_1$, онъ увидитъ ребра SA_1, SB_1... расположенными по движенію часовой стрѣлки.



Черт. 263

Многогранные углы съ соотвѣтственно равными плоскими и двугранными углами, но расположенными въ обратномъ порядкѣ, вообще не могутъ совмѣститься при вложеніи; значитъ, они не равны. Такіе углы называются *симметричными*.

КНИГА II.

МНОГОГРАННИКИ.

ГЛАВА I.

Свойства параллелопипеда и пирамиды.

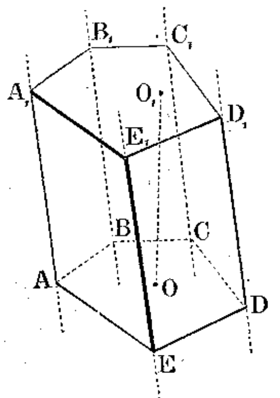
361. Многогранникъ. Многогранникомъ наз. тѣло, ограниченное со всѣхъ сторонъ плоскостями. Многоугольники, образованные пересѣченіемъ этихъ плоскостей, наз. *гранями*, ихъ стороны—*ребрами*, а вершины—*вершинами* многогранника. Прямыя, соединяющія двѣ какія-нибудь вершины, не прилежащія къ одной грани, наз. *діагоналями*.

Мы будемъ разсматривать только *выпуклые* многогранники, т. е. такіе, которые расположены по одну сторону отъ каждой своей грани.

Наименьшее число граней въ многогранникѣ четыре; такой многогранникъ получается отъ пересѣченія треграннаго угла какою-нибудь плоскостью.

362. Призма. Призмою наз. многогранникъ, у котораго двѣ грани — равные многоугольники съ отвѣтственно параллельными сторонами, а всѣ остальныя грани — параллелограммы.

Чтобы показать возможность существованія такого многогранника, возьмемъ какой-нибудь многоугольникъ $ABCDE$ и черезъ его вершины проведемъ рядъ параллельныхъ прямыхъ, не лежащихъ въ его плоскости. Взявъ затѣмъ на одной изъ этихъ прямыхъ произвольную точку A_1, проведемъ черезъ нее плоскость, параллельную плоскости $ABCDE$; черезъ каждыя двѣ послѣдовательныя параллельныя прямыя также проведемъ плоскости. Пересѣченіе всѣхъ этихъ плоскостей опредѣлитъ многогранникъ $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$, удовлетворяющій опредѣленію призмы. Дѣйствительно, параллельныя плоскости $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ пересѣкаются боковыми плоскостями по параллельнымъ прямымъ (**332**); поэтому фигуры AA_1E_1E, EE_1D_1D и т. д. параллелограммы. Съ другой стороны у многоугольниковъ $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ равны соотвѣтственно стороны (какъ противоположныя стороны параллелограммовъ) и углы (какъ углы съ параллельными и одинаково направленными сторонами); слѣд., эти многоугольники равны.



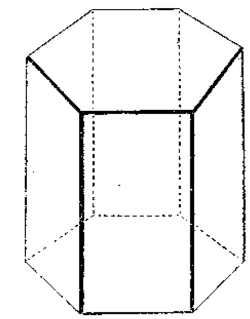
Черт. 264

Параллельные многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ наз. *основаніями* призмы; перпендикуляръ OO_1, опущенный изъ какой-нибудь точки одного основанія на другое, наз.

высотою призмы. Параллелограммы наз. *боковыми гранями* призмы, а ихъ стороны, соединяющія соотвѣтственныя вершины основаній — *боковыми ребрами*. У призмы всѣ боковыя ребра равны, какъ отрѣзки параллельныхъ прямыхъ, заключенные между параллельными плоскостями.

Призма наз. *прямою* или *наклонною*, смотря потому, будутъ ли ея боковыя ребра перпендикулярны или наклонны къ основаніямъ. У прямой призмы боковыя грани суть прямоугольники. За высоту такой призмы можно принять боковое ребро.

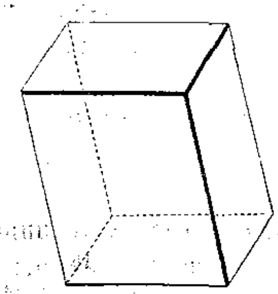
Прямая призма наз. *правильною*, если ея основанія правильные многоугольники. У такой призмы всѣ боковыя грани суть равные прямоугольники (черт. 265).

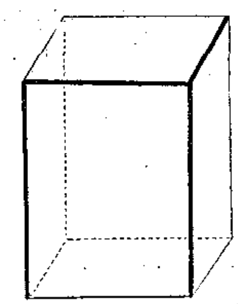

Черт. 265

Призмы бываютъ: треугольныя, четыреугольныя и т. д., смотря по тому, лежитъ ли въ основаніи треугольникъ, четыреугольникъ и т. д.

363. Параллелопипедъ. Такъ называютъ призму, у которой основаніями служатъ параллелограммы (черт. 266).

Параллелопипеды могутъ быть прямые и наклонные. Прямой параллелопипедъ наз. *прямоугольнымъ*, если его основанія прямоугольники (черт. 267).


Черт. 266


Черт. 267

Изъ этихъ опредѣленій слѣдуетъ:

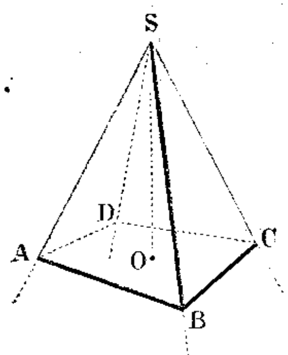
1°, у параллелопипеда всѣ шесть граней параллелограммы.

2°, у прямого параллелопипеда четыре боковыя грани прямоугольники.

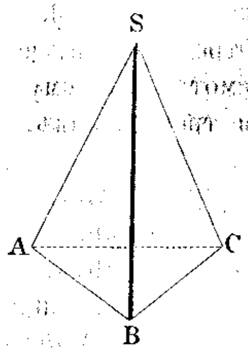
3°, у прямоугольнаго параллелопипеда всѣ грани прямоугольники.

Три ребра прямоугольнаго параллелопипеда, сходящіяся въ одной вершинѣ, наз. его *измѣреніями*; одно изъ нихъ можно разсматривать, какъ длину, другое, какъ ширину, а третье, какъ высоту. Прямоугольный параллелопипедъ, имѣющій равныя измѣренія, наз. *кубомъ*. У куба всѣ грани — квадраты.

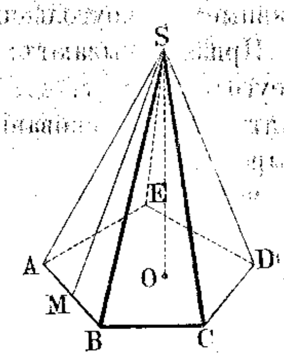
364. Пирамида. Это есть многогранникъ, у котораго одна грань, называемая *основаніемъ*, есть какой-нибудь многоугольникъ, а всѣ остальныя грани, называемыя *боковыми*, — треугольники, имѣющіе общую вершину.



Черт. 268



Черт. 269



Черт. 270

Чтобы получить пирамиду, достаточно какой-нибудь многогранный уголъ S (черт. 268) пересѣчь произвольною плоскостью $ABCD$.

Общая вершина S боковыхъ треугольниковъ наз. *вершиною* пирамиды, а перпендикуляръ SO, опущенный изъ вершины на основаніе, — *высотою* ея.

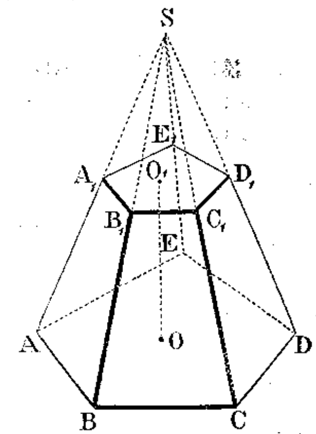
Обыкновенно, обозначая пирамиду буквами, пишутъ сначала ту, которая поставлена у вершины; напр.: $SABCD$ (черт. 268).

Пирамиды бываютъ: треугольныя, четыреугольныя и т. д., смотря по тому, лежитъ ли въ основаніи треугольникъ, четыреугольникъ и т. д. Треугольная пирамида (черт. 269)

наз. иначе *тетраэдромъ*; у такой пирамиды всѣ четыре грани треугольники.

Пирамида наз. *правильною* (черт. 270), если ея основаніе есть правильный многоугольникъ, и высота проходитъ черезъ центръ этого многоугольника. Въ правильной пирамидѣ всѣ боковыя ребра равны между собою (какъ наклонныя съ равными проекціями). Поэтому всѣ боковыя грани правильной пирамиды суть равные равнобедренные тр.-ки. Высота SM (черт. 270) какого либо одного изъ этихъ тр.-ковъ наз. *апоѳемою*. Всѣ апоѳемы въ одной пирамидѣ равны.

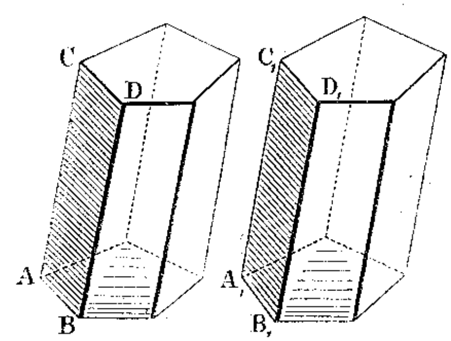
365. Усѣченная пирамида. Отрѣзокъ пирамиды, заключенный между основаніемъ $ABCDE$ и сѣкущею плоскостью $A_1B_1C_1D_1E_1$, *параллельною* основанію, наз. *усѣченною* пирамидою. Параллельные многоугольники наз. *основаніями*, а разстояніе между ними OO_1 — *высотою*. Усѣченная пирамида наз. *правильною*, если она составляетъ отрѣзокъ правильной пирамиды.



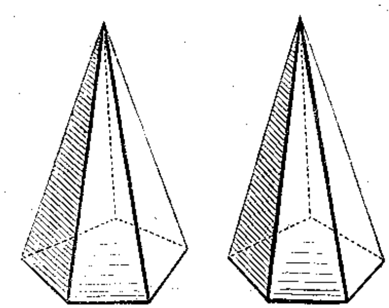
Черт. 271

Равенство призмъ и пирамидъ.

366. Теорема. *Двѣ призмы или двѣ пирамиды равны, если основаніе и боковая грань одной и основаніе и боковая грань другой соотвѣтственно равны, одинаково наклонены и одинаково расположены.*



Черт. 272



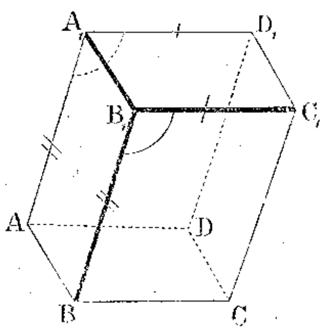
Черт. 273

Пусть въ двухъ призмахъ соотвѣтственно равны и одинаково расположены основанія и боковыя грани AD и A_1D_1, и сверхъ того равны двугранные углы AB и A_1B_1. Вложимъ одну призму въ другую такъ, чтобы у нихъ совпали равныя основанія. Тогда, по равенству двугр. угловъ, грань A_1D_1 пойдетъ по AD, и такъ какъ эти грани равны и одинаково расположены, то онѣ совпадутъ; но тогда совпадутъ и верхнія основанія (какъ параллельныя и равныя нижнимъ основаніямъ), т.-е. призмы совмѣстятся.

То же доказательство примѣняется и къ пирамидамъ (черт. 273).

Свойства граней и діагоналей параллелопипеда.

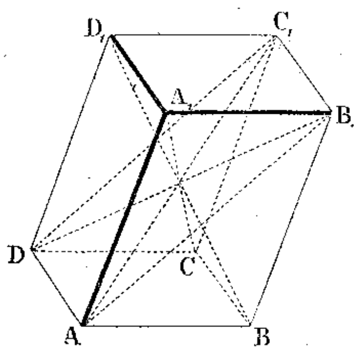
367. Теорема. *Въ параллелопипедѣ противоположныя грани равны и параллельны.*



Черт. 274

Такъ, грани BB_1C_1C и AA_1D_1D параллельны, потому что двѣ пересѣкающіяся прямыя BB_1 и B_1C_1 одной грани параллельны двумъ пересѣкающимся прямымъ AA_1 и A_1D_1 другой (**331**, 2°); эти грани и равны, такъ какъ $B_1C_1=A_1D_1$, $B_1B=A_1A$ (какъ противоположныя стороны параллелограммовъ) и $\angle BB_1C=\angle AA_1D_1$ (**338**).

368. Теорема. *Въ параллелопипедѣ діагонали пересѣкаются въ одной точкѣ и дѣлятся въ ней пополамъ.*



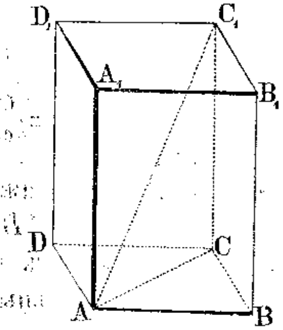
Черт. 275

Возьмемъ въ параллелопипедѣ AC_1 какія-нибудь двѣ діагонали, напр. AC_1 и DB_1, и проведемъ прямыя AB_1 и DC_1. Такъ какъ ребра AD и B_1C_1 соотвѣтственно равны и параллельны ребру BC, то они равны и параллельны между собою; вслѣдствіе этого фигура ADC_1B_1 есть параллелограммъ (**97**, 2°), въ которомъ AC_1 и DB_1—діагонали; а въ параллелограммѣ діагонали пересѣкаются пополамъ.

Это доказательство можно повторить о *каждыхъ двухъ*

діагоналяхъ; поэтому діагональ AC_1 пересѣкается съ BD_1 пополамъ, діагональ BD_1 пересѣкается съ A_1C пополамъ; такимъ образомъ, всѣ четыре діогонали пересѣкаются пополамъ, и слѣд. въ одной точкѣ.

369. Теорема. *Въ прямоугольномъ параллелопипедѣ квадратъ діагонали равенъ суммѣ квадратовъ трехъ его измѣреній.*



Черт. 276

Пусть AC_1 есть діагональ прямоугольнаго параллелопипеда. Проведя AC, получимъ два тр.-ка: AC_1C и ACB. Оба они прямоугольные: первый потому, что параллелопипедъ *прямой*, и, слѣд., ребро CC_1 перпендикулярно къ основанію; второй потому, что параллелопипедъ *прямоугольный*, значитъ, въ основаніи его лежитъ прямоугольникъ. Изъ этихъ тр.-ковъ находимъ:

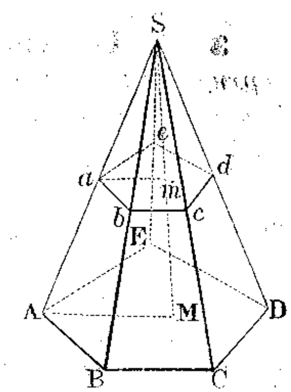
$AC_1^2=AC^2+CC_1^2$ и $AC^2=AB^2+BC^2$.

Слѣд. $AC_1^2=AB^2+BC^2+CC_1^2=AB^2+AD^2+AA_1^2$.

370. Слѣдствіе. *Въ прямоугольномъ параллелопипедѣ всѣ діагонали равны.*

Свойства параллельныхъ сѣченій въ пирамидѣ.

371. Теоремы. *Если пирамида* (черт. 277) *пересѣчена плоскостью, параллельною основанію, то:*



Черт. 277

1°, *боковыя ребра и высота дѣлятся этою плоскостью на части пропорціанальныя;*

2°, *въ сѣченіи получается многоугольникъ (abcde), подобный основанію;*

3°, *площади сѣченія и основанія относятся, какъ квадраты ихъ разстояній отъ вершины.*

1°. Прямыя ab и AB можно разсматривать, какъ пересѣченія двухъ параллельныхъ плоскостей (основанія и сѣкущей) третьею плоскостью ASB; поэтому $ab \parallel AB$

(**332**). По той же причинѣ $bc \parallel BC, cd \parallel CD$.. и $am \parallel AM$; вслѣдствіе этого (**192**).

$$\frac{Sa}{aA}=\frac{Sb}{bB}=\frac{Sc}{cC}=\ldots=\frac{Sm}{mM}$$

2°. Изъ подобія тр.-ковъ ASB и aSb, затѣмъ BSC и bSc и т. д., выводимъ:

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BS}{bS};\ \frac{BS}{bS}=\frac{BC}{bc};\ \text{откуда: } \frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}$$

$$\frac{BC}{bc}=\frac{CS}{cS};\ \frac{CS}{cS}=\frac{CD}{cd};\ \text{откуда: } \frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}$$

Такъ же докажемъ пропорціональность остальныхъ сторонъ мн.-ковъ $ABCDE$ и $abcde$. Такъ какъ, сверхъ того, у этихъ мн.-ковъ равны соотвѣтственно углы (какъ образованные параллельными и одинаково направленными сторонами), то они подобны.

3°. Площади подобныхъ многоугольниковъ относятся, какъ квадраты сходственныхъ сторонъ; поэтому:

$$\frac{\text{площ. } ABCDE}{\text{площ. } abcde}=\frac{AB^2}{ab^2}=\left(\frac{AB}{ab}\right)^2$$

$$\text{Но}\quad \frac{AB}{ab}=\frac{AS}{aS}=\frac{MS}{mS}$$

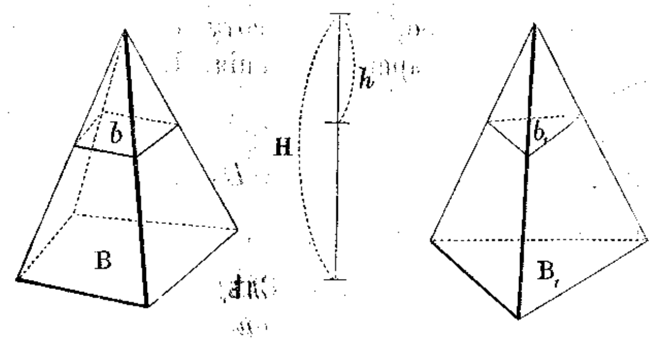
$$\text{Значитъ:}\quad \frac{\text{площ. } ABCDE}{\text{площ. } abcde}=\left(\frac{MS}{mS}\right)^2=\frac{MS^2}{mS^2}$$

332. Слѣдствіе. *У правильной усѣченной пирамиды верхнее основаніе есть правильный многоугольникъ, а боковыя грани суть равныя и равнобочныя трапеціи* (см. черт. 271).

Высота какой-нибудь изъ этихъ трапецій наз. *апоѳемой* прав. усѣч. пирамиды.

333. Теорема. *Если двѣ пирамиды съ равными высотами разсѣчены на одинаковомъ разстояніи отъ вершины плоскостями, параллельными основаніямъ, то площади сѣченій пропорціональны площадямъ основаній.*

Пусть B и B_1 будутъ площади основаній двухъ пирамидъ, H высота каждой изъ нихъ, b и b_1 площади сѣченій плоскостями, параллельными основаніямъ и удаленными отъ



Черт. 278

вершинъ на одно и то же разстояніе h. Согласно предыдущей теоремѣ мы будемъ имѣть:

$$\frac{b}{B}=\frac{h^2}{H^2}\quad \text{и}\quad \frac{b_1}{B_1}=\frac{h^2}{H^2}$$

$$\text{Откуда:}\quad \frac{b}{B}=\frac{b_1}{B_1}$$

334. Слѣдствіе. Если $B=B_1$, то и $b=b_1$, т. е. *если у двухъ пирамидъ съ равными высотами основанія равновелики, то равновелики и сѣченія, равноотстоящія отъ вершины.*

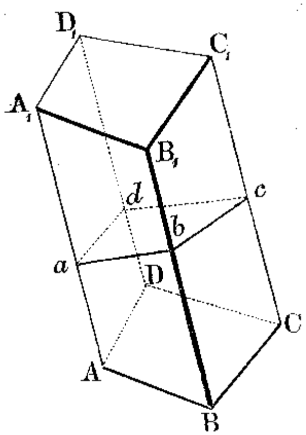
ГЛАВА II.

Боковая поверхность призмы и пирамиды.

335. Теорема. *Боковая поверхность призмы равна произведенію периметра перпендикулярнаго сѣченія на боковое ребро.*

Перпендикулярнымъ сѣченіемъ (черт. 279) наз. многоугольникъ $abcd$, получаемый отъ пересѣченія призмы плоскостью, перпендикулярною къ боковымъ ребрамъ. Стороны этого многоугольника перпендикулярны къ ребрамъ.

Боковая поверхность призмы есть сумма площадей параллелограммовъ; въ каждомъ изъ нихъ за основаніе можно взять боковое ребро, а за высоту сторону перпендикулярнаго сѣченія. Поэтому:

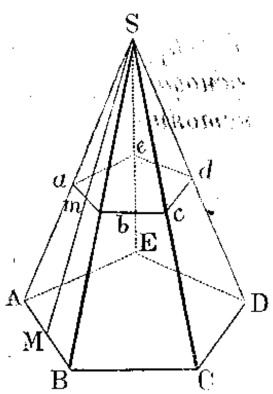


Черт. 279

$$\text{Бок. пов.} = AA_1 \,.\, ab + BB_1 \,.\, bc + CC_1 \,.\, cd + DD_1 \,.\, da = (ab + bc + cd + da).\ AA_1$$

376. Слѣдствіе. *Боковая поверхность прямой призмы равна произведенію периметра основанія на высоту,* потому что въ такой призмѣ за перпендикулярное сѣченіе можно взять само основаніе, а боковое ребро ея равно высотѣ.

377. Теорема. *Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведенію периметра основанія на половину апоѳемы.*



Черт. 280

Пусть $SABCDE$ есть прав. пирамида и SM ея апоѳема. Боковая поверхность этой пирамиды есть сумма площадей равныхъ равнобедренныхъ тр.-ковъ. Площадь одного изъ нихъ, напр. ASB, равна $AB . \frac{1}{2} SM$. Если всѣхъ тр.-ковъ n, то боковая поверхность выразится $(AB.\ n).\ \frac{1}{2}\ SM$, гдѣ $AB.n$ есть периметръ основанія, а SM апоѳема.

378. Теорема. *Боковая поверхность правильной усѣченной пирамиды равна произведенію полусуммы периметровъ обоихъ основаній на апоѳему.*

Эта поверхность есть сумма площадей равныхъ трапецій. Площадь одной изъ нихъ, напр. $AabB$ (черт. 280) равна $\frac{1}{2}(AB + ab).\ Mm$ (**280**). Если число всѣхъ трапецій есть n, то

$$\text{бок. пов.} = \frac{AB + ab}{2}.\ Mm.\ n = \frac{AB.n + ab.n}{2}.\ Mm$$

гдѣ $AB.n$ и $ab.n$ суть периметры нижняго и верхняго основаній.

Задачи.

327. Высота прямой призмы, которой основаніе есть правильный треугольникъ, равна 12 метрамъ, а сторона основанія 3 метр. Вычислить полную поверхность призмы.

328. Полная поверхность прямоугольнаго параллелопипеда равна 1714 кв. футовъ, а неравныя стороны основанія равны 25 и 14. Вычислить боковую поверхность и боковое ребро.

329. Въ прямоугольномъ параллелопипедѣ съ квадратнымъ основаніемъ и высотою h проведена сѣкущая плоскость черезъ два противоположныя боковыя ребра. Вычислить полную поверхность параллелопипеда, зная, что площадь сѣченія равна S.

330. Правильная шестиугольная пирамида имѣетъ сторону основанія a и высоту h. Вычислить боковое ребро, апоѳему, боковую поверхность и полную поверхность.

331. Вычислить полную поверхность и высоту треугольной пирамиды, у которой каждое ребро равно a.

332. Правильная шестиугольная пирамида, у которой высота 25 сантим., а сторона основанія 5 сант., разсѣчена плоскостью, параллельною основанію. Вычислить разстояніе этой плоскости отъ вершины пирамиды, зная, что площадь сѣченія $= 10\sqrt{3}$ квадр. сант.

333. Высота усѣченной пирамиды съ квадратнымъ основаніемъ равна h, сторона нижняго основанія a, а верхняго b. Найти полную поверхность усѣч. пирамиды.

334. Высота усѣченной пирамиды равна 6, а площади основаній 18 и 8. Пирамида разсѣчена плоскостью, параллельною основаніямъ, и дѣлящею высоту пополамъ. Вычислить площадь сѣченія.

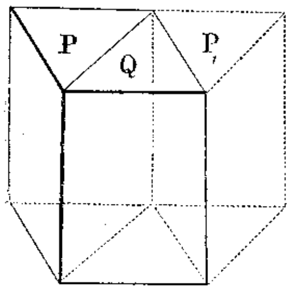
ГЛАВА III.

Объемъ призмы и пирамиды.

379. Объемъ. Объемомъ геометрическаго тѣла наз. величина той части пространства, которую занимаетъ это тѣло.

Равныя тѣла, т. е. совмѣщающіяся при вложеніи, имѣютъ и равные объемы. Но и неравныя тѣла могутъ имѣть одинаковые объемы. Если, напр., мы разрѣжемъ діагональною плоскостью параллелопипедъ (черт. 281) на части P и Q и затѣмъ часть

P приложимъ къ Q такъ, чтобы она заняла положеніе P_1, то получимъ другой параллелопипедъ, не равный первому, но имѣющій съ нимъ одинаковый объемъ.



Черт. 282

Два тѣла, у которыхъ объемы одинаковы, наз. *равновеликими*.

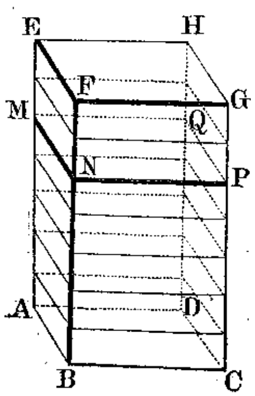
380. Единица объема. За единицу объема берутъ объемъ такого куба, у котораго измѣреніе равно линейной единицѣ. Такъ, употребительны: куб. аршинъ, куб. метръ и т. п. Замѣтимъ что куб. метръ наз. иначе *стеръ*, а куб. дециметръ—*литръ*.

Объемъ прямоугольнаго параллелопипеда.

381. Лемма 1. *Объемы прямоугольныхъ параллелопипедовъ, имѣющихъ равныя основанія, относятся, какъ ихъ высоты.*

Если прямоуг. параллелопипеды имѣютъ равныя основанія, то ихъ можно вложить одинъ въ другой. Пусть AG и AP (черт. 282) будутъ такіе два параллелопипеда. Разсмотримъ два случая.

1°. *Высоты BF и BN соизмѣримы.* Пусть общая мѣра высотъ содержится m разъ въ BF и n разъ въ BN. Проведемъ через точки дѣленія рядъ плоскостей, параллельныхъ основанію. Тогда пар.-дъ AG раздѣлится на m, а пар.-дъ AP на n равныхъ частей; такимъ образомъ мы получимъ:



Черт. 282

$$\frac{BF}{BN}=\frac{m}{n} \quad \text{и} \quad \frac{\text{Объемъ } AG}{\text{Объемъ } AP}=\frac{m}{n}$$

Слѣд.: $$\frac{\text{Объемъ } AG}{\text{Объемъ } AP}=\frac{BF}{BN}$$

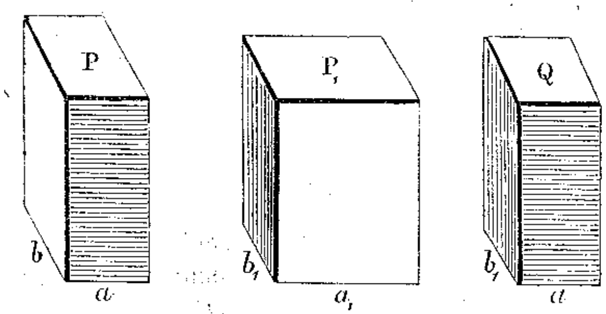
2°. *Высоты BF и BN несоизмѣримы.* Раздѣлимъ BN на n равныхъ частей и одну часть отложимъ на BF столько разъ, сколько можно. Пусть $^1/_n$ доля BN содержится въ BF болѣе m разъ, но менѣе $m+1$ разъ. Тогда, проведя

по прежнему рядъ плоскостей, параллельныхъ основанію, мы раздѣлимъ пар.-дъ AP на n такихъ равныхъ частей, какихъ въ пар.-дѣ AG содержится болѣе m, но менѣе $m+1$. Слѣд.:

$$\text{приб. отн. } \frac{BF}{BN}=\frac{m}{n} \quad \text{и приб. отн. } \frac{\text{об. } AG}{\text{об. } AP}=\frac{m}{n}$$

Такимъ образомъ, приближенныя отношенія, вычисленныя съ произвольною, но одинаковою точностью, равны; а въ этомъ и состоитъ равенство несоизмѣримыхъ отношеній.

382. Лемма 2. *Объемы прямоугольныхъ параллелопипедовъ, имѣющихъ равныя высоты, относятся, какъ площади ихъ основаній.*



Черт. 283.

Пусть P и P_1 два прямоугольные параллелопипеда. Обозначимъ неравныя стороны основанія одного изъ нихъ черезъ a и b, а другого черезъ a_1 и b_1. Возьмемъ вспомогательный прямоугольный пар.-дъ Q, у котораго высота такая же какъ у данныхъ тѣлъ, а основаніемъ служитъ прямоугольникъ со сторонами a и b_1. У пар.-довъ P и Q переднія грани (покрытыя на чертежѣ горизонтальными штрихами) равны. Если примемъ эти грани за основанія, то высоты будутъ b и b_1, и слѣд. (**381**):

$$\frac{\text{Объемъ } P}{\text{Объемъ } Q}=\frac{b}{b_1} \qquad [1]$$

У пар.-довъ Q и P_1 боковыя грани (покрытыя на чертежѣ вертикальными штрихами) равны. Если примемъ эти грани за основанія, то высоты будутъ a и a_1, и слѣд.:

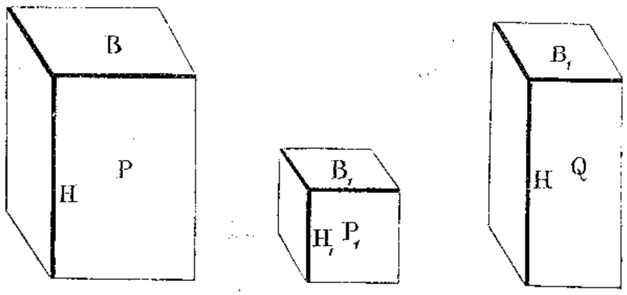
$$\frac{\text{Объемъ } Q}{\text{Объемъ } P_1}=\frac{a}{a_1} \qquad [2]$$

Перемноживъ равенства [1] и [2], найдемъ:

$$\frac{\text{Объемъ } P}{\text{Объемъ } P_1}=\frac{ab}{a_1b_1}$$

Такъ какъ ab выражаетъ площадь основанія пар.-да P, а a_1b_1—площадь основанія пар.-да P_1, то лемма доказана.

383. Теорема. *Объемъ прямоугольнаго параллелопипеда равенъ произведенію площади основанія на высоту.*



Черт. 284

Пусть P есть прямоугольный параллелопипедъ, а P_1— какая нибудь кубическая единица. Обозначимъ площадь основанія и высоту перваго черезъ B и H, а втораго черезъ B_1 и H_1. Возьмемъ вспомогательный прямоугольный пар.-дъ Q, у котораго площадь основанія B_1, а высота H. Сравнивая P съ Q, а затѣмъ Q съ P_1, находимъ (**382** и **381**):

$$\frac{\text{Об. } P}{\text{Об. } Q}=\frac{B}{B_1} \quad \text{и} \quad \frac{\text{об. } Q}{\text{об. } P_1}=\frac{H}{H_1}$$

Перемноживъ эти равенства, получимъ:

$$\frac{\text{Об. } P}{\text{Об. } P_1}=\frac{B}{B_1}\cdot\frac{H}{H_1}$$

Отношенія, входящія въ это равенство, суть числа, выражающія объемъ, площадь основанія и высоту даннаго параллелопипеда въ соотвѣтствующихъ кубическихъ, квадратныхъ и линейныхъ единицахъ; поэтому послѣднее равенство можно высказать такъ:

Число, выражающее объемъ прямоугольнаго параллелопипеда, равно произведенію чиселъ, выражающихъ площадь основанія и высоту въ соотвѣтствующихъ единицахъ.

Это выражаютъ сокращенно такъ: *объемъ прямоугольнаго параллелопипеда равенъ произведенію площади основанія на высоту*, т. е.

$$V=BH$$

гдѣ подъ V, B и H разумѣются *числа*, выражающія въ соотвѣтствующихъ единицахъ объемъ, площадь основанія и высоту прямоугольнаго параллелопипеда.

Обозначая буквами a, b и c три измѣренія прям. пар.-да (выраженныя въ числахъ), можемъ написать:

$$V=abc$$

потому что площадь основанія выражается произведеніемъ двухъ изъ этихъ измѣреній, а высота равна третьему измѣренію.

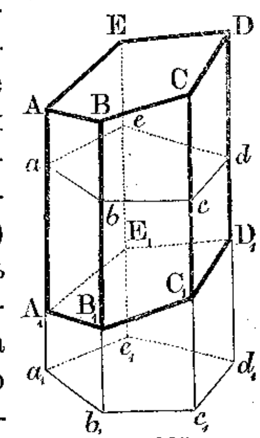
384. Слѣдствія. 1°. *Объемъ куба равенъ третьей степени его ребра.*

2°. *Отношеніе двухъ куб. единицъ равно третьей степени отношенія соотвѣтствующихъ линейныхъ единицъ;* такъ, отношеніе куб. метра къ куб. дециметру равно 10^3, т. е. 1000.

Объемъ всякаго параллелопипеда.

385. Лемма. *Наклонная призма равновелика такой прямой призмѣ, у которой основаніе равно перпендикулярному сѣченію наклонной призмы, а высота—ея боковому ребру.*

Черезъ какую нибудь точку a одного изъ боковыхъ реберъ наклонной призмы A_1D проведемъ перпендикулярное сѣченіе $abcde$. Затѣмъ, продолживъ всѣ боковыя грани внизъ, отложимъ $aa_1=AA_1$ и черезъ точку a_1 проведемъ перпендикулярное сѣченіе $a_1b_1c_1d_1e_1$. Такъ какъ плоскости двухъ сѣченій параллельны, то части боковыхъ реберъ, заключенныя между ними, равны, т. е. $bb_1=cc_1=dd_1=ee_1=aa_1=AA_1$ (**336**) Вслѣдствіе этого многогранникъ a_1d есть прямая призма, у которой основаніемъ служитъ перпендикулярное сѣченіе, а высота (или, что все равно, боковое ребро) равно боковому ребру наклонной призмы. Докажемъ, что наклонная призма равновелика

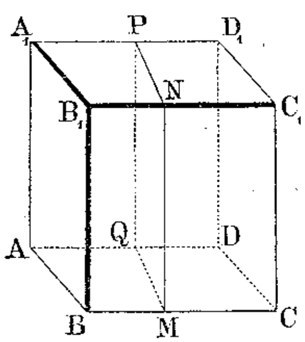


Черт. 285

этой прямой. Для этого предварительно убѣдимся, что многогранники aD и a_1D_1 равны. Основанія ихъ $abcde$ и $a_1b_1c_1d_1e_1$ равны, какъ основанія призмы a_1d; съ другой стороны, изъ равенства $A_1A = a_1a$ слѣдуетъ: $A_1A - A_1a = a_1a - A_1a$, т. е. $aA = a_1A_1$; подобно этому: $bB = B_1b_1$, $cC = c_1C_1$ и т. д. Вообразимъ теперь, что многогранникъ aD вложенъ въ a_1D_1 такъ, чтобы основанія ихъ совпали; тогда боковыя ребра, будучи перпендикулярны къ основаніямъ и соотвѣтственно равны, также совпадутъ; поэтому многогранникъ aD совмѣстится съ a_1D_1, значитъ, эти тѣла равны. Теперь замѣтимъ, что если отъ цѣлаго многогранника a_1D отнимемъ часть aD, то получимъ прямую призму; а если отъ того же многогранника отнимемъ часть a_1D_1, то получимъ наклонную призму. Изъ этого слѣдуетъ, что эти двѣ призмы равновелики.

386. Теорема. *Объемъ параллелопипеда равенъ произведенію площади основанія на высоту.*

Сначала мы докажемъ эту теорему для параллелопипеда *прямого*, а потомъ и *наклоннаго*.



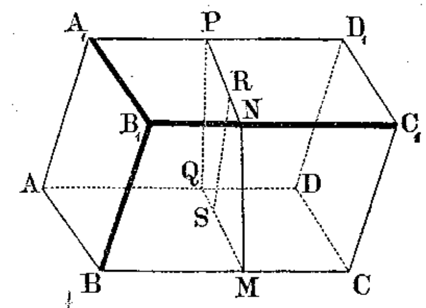
Черт. 286

1°. Пусть AC_1 будетъ прямой пар.-дъ, т.-е. такой, у котораго основаніе $ABCD$ есть параллелограммъ, а всѣ боковыя грани — прямоугольники. Возьмемъ въ немъ за основаніе грань AA_1B_1B; тогда параллелопипедъ будетъ *наклонный*. Согласно леммѣ предыдущаго §, этотъ пар.-дъ равновеликъ такому прямому, у котораго основаніе есть перпендикулярное сѣченіе $MNPQ$, а высота BC. Четыреугольникъ $MNPQ$ есть прямоугольникъ, потому что его углы служатъ линейными углами прямыхъ двугранныхъ угловъ; поэтому прямой пар.-дъ, имѣющій это основаніе, долженъ быть *прямоугольнымъ*, и, слѣд., его объемъ равенъ произведенію площади основанія $MNPQ$ на высоту BC. Но площадь $MNPQ$ равна $MN.MQ$; значитъ:

Объемъ $AC_1 = MN \,.\, MQ \,.\, BC$

Произведеніе $MQ \,.\, BC$ выражаетъ площадь параллелограмма $ABCD$; поэтому:

Объемъ $AC_1 =$ (площ. $ABCD$) . MN



Черт. 287

2°. Пусть AC_1 будетъ пар.-дъ наклонный. Онъ равновеликъ такому прямому, у котораго основаніе есть перпендикулярное сѣченіе $MNPQ$, а высота BC. Но, по доказанному, объемъ прямого параллелопипеда равенъ произведенію площади основанія на высоту; значитъ:

Объемъ $AC_1 =$ (площ. $MNPQ$) . BC

Если RS есть высота сѣченія $MNPQ$, то площадь $MNPQ = MQ \,.\, RS$; поэтому:

Объемъ $AC_1 = MQ \,.\, RS \,.\, BC$

Произведеніе $BC \,.\, MQ$ выражаетъ площадь параллелограмма $ABCD$; слѣд.

Объемъ $AC_1 =$ (площ. $ABCD$) . RS

т.-е. объемъ всякаго параллелопипеда равенъ произведенію площади основанія на высоту.

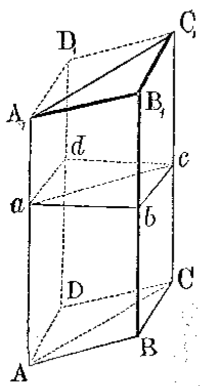
387. Слѣдствіе. Если V, B и H суть числа, выражающія въ соотвѣтствующихъ единицахъ объемъ, площадь основанія и высоту какого ни на есть параллелопипеда, то можемъ писать:

$$V = BH$$

Объемъ призмы.

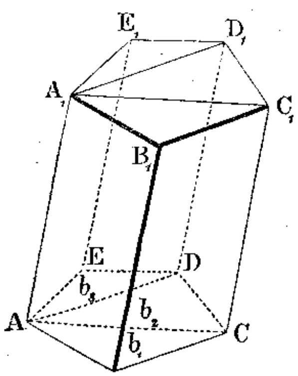
388. Теорема. *Объемъ призмы равенъ произведенію площади основанія на высоту.*

Сначала докажемъ эту теорему для треугольной призмы, а потомъ для многоугольной.



Черт. 288

1°. Проведемъ черезъ ребро AA_1 треугольной призмы AC_1 плоскость, параллельную грани BB_1C_1C, а черезъ ребро CC_1 плоскость, параллельную грани AA_1B_1B; затѣмъ продолжимъ плоскости обоихъ основаній призмы до пересѣченія съ ранѣе проведенными плоскостями. Тогда мы получимъ параллелопипедъ BD_1, который діагональною плоскостью AA_1C_1C дѣлится на двѣ треугольныя призмы (изъ нихъ одна есть данная). Докажемъ, что эти призмы равновелики. Для этого проведемъ перпендикулярное сѣченіе $abcd$. Въ сѣченіи получится параллелограммъ, который діагональю ac дѣлится на два равные тр.-ка. Данная призма равновелика такой прямой, у которой основаніе есть $\triangle abc$, а высота — ребро AA_1 (**385**). Другая треугольная призма равновелика такой прямой, у которой основаніе есть $\triangle adc$, а высота — ребро AA_1. Но двѣ прямыя призмы съ равными основаніями и равными высотами равны (потому что при вложеніи онѣ совмѣщаются); значитъ, призмы $ABCA_1B_1C_1$ и $ADCA_1D_1C_1$ равновелики. Изъ этого слѣдуетъ, что объемъ данной призмы составляетъ *половину* объема параллелопипеда BD_1; поэтому, обозначая высоту черезъ H, получимъ (**386**):



Черт. 289

$$\text{Об. тр. призмы} = \frac{1}{2}\,(\text{площ. } ABCD)H$$

$$= \left(\frac{1}{2}\,\text{площ. } ABCD\right)H = (\text{площ. } ABC)H$$

2°. Проведемъ черезъ ребро AA_1 данной многоугольной призмы (черт. 289) и черезъ всѣ остальныя боковыя ребра, кромѣ двухъ ближайшихъ, плоскости AA_1C_1C и AA_1D_1D. Тогда данная призма разсѣ-

чется на нѣсколько треугольныхъ призмъ. Сумма объемовъ этихъ призмъ составляетъ искомый объемъ. Если обозначимъ площади ихъ основаній черезъ b_1, b_2, b_3, а общую высоту черезъ H, то получимъ:

$$\text{Объемъ мн. призмы} = b_1H + b_2H + b_3H = (b_1 + b_2 + b_3)H$$

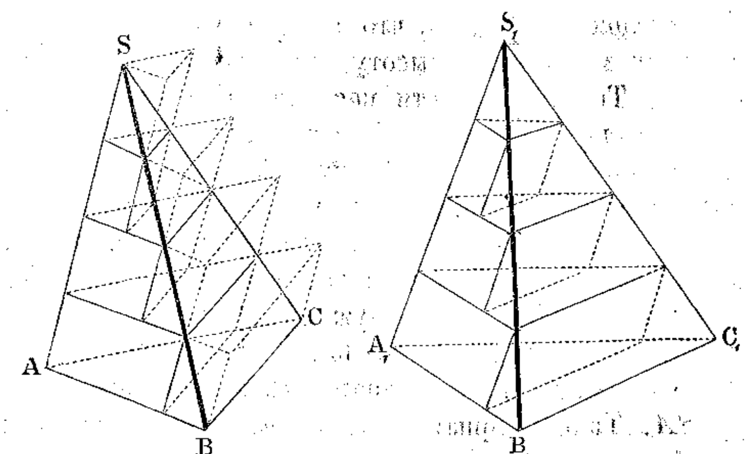
$$= (\text{площ. } ABCDE)H$$

389. Слѣдствіе. Если V, B и H будутъ числа, выражающія въ соотвѣтственныхъ единицахъ объемъ, площадь основанія и высоту призмы, то, по доказанному, можемъ писать:

$$V = BH.$$

Объемъ пирамиды.

390. Лемма. *Треугольныя пирамиды съ равновеликими основаніями и равными высотами равновелики.*



Черт. 290

Раздѣлимъ высоту каждой изъ данныхъ пирамидъ на произвольное число n равныхъ частей и черезъ точки дѣленія проведемъ рядъ плоскостей, параллельныхъ основанію (на чертежѣ высота, а слѣд. и боковыя ребра, раздѣлены на 4 равныя части). Такъ какъ, по условію, основанія ABC и $A_1B_1C_1$

равновелики, то тр.-ки, получившіеся въ сѣченіяхъ одной пирамиды, соотвѣтственно равновелики тр.-камъ, получившимся въ сѣченіи другой пирамиды (**374**). Построимъ теперь въ каждой пирамидѣ рядъ внутреннихъ призмъ такихъ, чтобы верхними основаніями у нихъ были треугольники сѣченій, боковыя ребра были параллельны ребру SA въ одной пирамидѣ и ребру S_1A_1 въ другой, а высота каждой призмы равнялась бы $^1/_n$ высоты пирамиды. Такихъ призмъ въ каждой пирамидѣ будетъ $n-1$. Объемы призмъ пирамиды S обозначимъ по порядку, начиная отъ вершины, черезъ $p_1, p_2, p_3, \ldots p_{n-1}$, а объемы призмъ пирамиды S_1, также по порядку отъ вершины, черезъ $q_1, q_2, q_3, \ldots q_{n-1}$

Тогда:

$$p_1=q_1,\ p_2=q_2,\ p_3=q_3, \ldots p_{n-1}=q_{n-1}$$

потому что у каждой пары соотвѣтственныхъ призмъ основанія равновелики и высоты равны. Поэтому:

$$p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{n-1}=q_1+q_2+q_3+\cdots+q_{n-1}$$

Предположимъ теперь, что n, т.-е. число равныхъ частей, на которыя мы дѣлимъ высоту пирамидъ, неограниченно возрастаетъ. Тогда обѣ части послѣдняго равенства сдѣлаются величинами перемѣнными. Докажемъ, что каждая изъ нихъ стремится въ предѣлѣ къ объему той пирамиды, въ которую призмы вписаны. Это достаточно доказать для какой-нибудь одной пирамиды, напр. для S. Для этого построимъ въ ней рядъ призмъ, выходящихъ частью изъ пирамиды, такихъ, чтобы нижними основаніями ихъ служили треугольники сѣченій (и основаніе пирамиды), высоты были бы равны, по прежнему, $^1/_n$ высоты пирамиды, а боковыя ребра параллельны тому же ребру SA. Такихъ призмъ будетъ n. Обозначимъ ихъ объемы, начиная отъ вершины пирамиды, по порядку, черезъ $p_1', p_2', p_3', \ldots p'_{n-1}, p_n'$. Не трудно видѣть, что

$$p_1'=p_1,\ p_2'=p_2,\ p_3'=p_3 \ldots p'_{n-1}=p_{n-1}$$

Поэтому:

$$(p_1'+p_2'+p_3'+\cdots+p'_{n-1}+p_n')-(p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{n-1})=p_n'$$

Если объемъ пирамиды обозначимъ черезъ V, то очевидно, что:

$$p_1'+p_2'+p_3+\cdots+p_n'>V>p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}$$

Откуда: $$V-(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})<p_n'$$

При неограниченномъ увеличеніи числа n объемъ призмы p_n' стремится къ нулю (потому что высота ея стремится къ нулю, а основаніе не измѣняется); слѣд. разность $V-(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})$ и подавно стремится къ нулю; а это, по опредѣленію предѣла, означаетъ, что

$$V=\text{пред.}\ (p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})$$

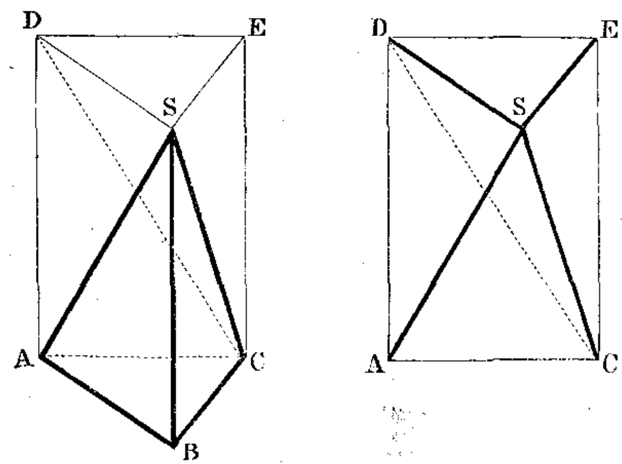
Подобно этому можно доказать, что V_1, т.-е. объемъ пирамиды S_1, есть предѣлъ перемѣнной суммы $q_1+q_2+\cdots+q_{n-1}$.

Но если двѣ перемѣнныя величины, имѣющія предѣлы, всегда остаются равными, то равны и ихъ предѣлы (**248**); поэтому:

$$V=V_1$$

что и требовалось доказать.

391. Теорема. *Объемъ пирамиды равенъ произведенію площади основанія на треть высоты.*



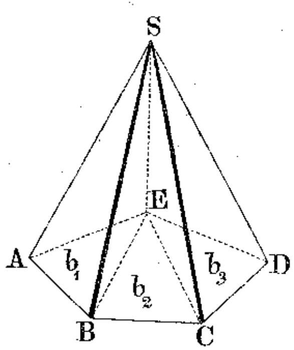
Черт. 291

Сначала докажемъ эту теорему для пирамиды треугольной, а затѣмъ многоугольной.

1°. На основаніи треугольной пирамиды $SABC$ построимъ такую призму $ABCDSE$, у которой высота равна высотѣ пирамиды, а одно боковое ребро совпадаетъ съ ребромъ SB. Теперь докажемъ, что объемъ пирамиды составляетъ третью часть объема этой призмы. Отдѣлимъ отъ призмы данную пирамиду. Тогда останется четыреугольная пирамида $SADEC$, (которая для ясности изображена отдѣльно). Проведемъ въ ней сѣкущую плоскость черезъ вершину S и діагональ основанія DC. Получившіяся отъ этого двѣ треугольныя пирамиды имѣютъ общую вершину S и равныя основанія DEC и DAC, лежащія въ одной плоскости; значитъ, согласно доказанной выше леммѣ, пирамиды $SDEC$ и $SDAC$ равновелики. Сравнимъ одну изъ нихъ, напр. $SDEC$, съ данной пирамидой. За основаніе пирамиды $SDEC$ можно взять $\triangle SDE$; тогда вершина ея будетъ въ точкѣ C, и высота равна высотѣ данной пирамиды. Такъ какъ $\triangle SDE = \triangle ABC$, то, согласно той же леммѣ, пирамиды $CSDE$ и $SABC$ равновелики. Такимъ образомъ, сумма объемовъ трехъ пирамидъ, равновеликихъ данной, составляетъ объемъ призмы; слѣд.

$$\text{Об. } SABC = \frac{1}{3} \text{ об. } SDEABC = (\text{площ. } ABC)\,\frac{H}{3}$$

гдѣ H означаетъ высоту пирамиды.



Черт. 292

2°. Черезъ какую-нибудь вершину E основанія многоугольной пирамиды $SABCDE$ проведемъ діагонали EB и EC. Затѣмъ черезъ ребро SE и каждую изъ этихъ діагоналей проведемъ сѣкущія плоскости. Тогда многоугольная пирамида разобьется на нѣсколько треугольныхъ, имѣющихъ высоту, общую съ данной пирамидой. Обозначивъ площади основаній треугольныхъ пирамидъ черезъ b_1, b_2, b_3 и высоту черезъ H, будемъ имѣть:

$$\text{Объемъ } SABCDE = \frac{1}{3} b_1 H + \frac{1}{3} b_2 H + \frac{1}{3} b_3 H$$

$$= (b_1 + b_2 + b_3)\,\frac{H}{3} = (\text{площ. } ABCDE)\,\frac{H}{3}$$

392. Слѣдствіе. Если V, B и H означаютъ числа, выражающія въ соотвѣтственныхъ единицахъ объемъ, площадь основанія и высоту какой угодно пирамиды, то

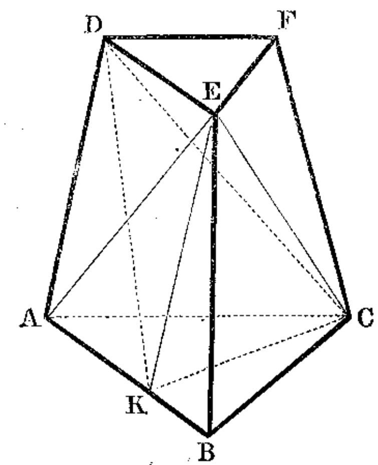
$$V = \frac{1}{3} BH.$$

Объемъ усѣченной пирамиды и усѣченной призмы.

393. Теорема. *Объемъ усѣченной пирамиды равенъ суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ, имѣющихъ высоту одинаковую съ высотою усѣченной пирамиды, а основаніями: одна— нижнее основаніе усѣченной пирамиды, другая—верхнее основаніе этой пирамиды, а третья—среднее пропорціональное между ними.*

Сначала докажемъ эту теорему для треугольной пирамиды, а потомъ многоугольной.

1°. Пусть $ABCDEF$ есть усѣченная треугольная пирамида. Отдѣлимъ отъ нея сѣкущею плоскостью AEC треугольную пирамиду $EABC$. Эта пирамида, имѣя основаніе ABC и вершину въ E, удовлетворяетъ требованію теоремы. Оставшаяся часть есть четыреугольная пирамида $EADFC$. Проведя въ ней сѣкущую плоскость черезъ точки E, D и C, мы раздѣлимъ ее на двѣ треугольныя пирамиды. Изъ нихъ одна имѣетъ основаніемъ $\triangle DEF$, т. е. верхнее основаніе усѣченной пирамиды, а вершину въ точкѣ C; слѣд., эта пирамида удовлетворяетъ требованію теоремы. Остается разсмотрѣть третью пирамиду $EADC$. Превратимъ ее въ другую равновеликую пирамиду слѣдующимъ образомъ. Проведемъ прямую $EK \parallel DA$ и точку K примемъ за вершину новой пирамиды, которой основаніемъ оставимъ тотъ же треугольникъ ADC. Пирамиды $EADC$ и $KADC$ равновелики, потому что у нихъ общее основаніе ADC и высоты равны



Черт. 293

(такъ какъ вершины лежатъ на прямой EK, параллельной плоскости основанія). Примемъ за вершину новой пирамиды точку D, а за основаніе $\triangle\ ACK$. Тогда высота ея будетъ равна высотѣ усѣченной пирамиды. Остается доказать, что основаніе ACK есть средняя пропорціанальная величина между ABC и DEF, т. е. что

$$\frac{\text{площ. } ABC}{\text{площ. } ACK}=\frac{\text{площ. } ACK}{\text{площ. } DEF}$$

У тр.-ковъ ABC и ACK за основанія можно взять стороны AB и AK; тогда вершина у нихъ будетъ общая C, и, слѣд., высоты будутъ одинаковы; поэтому:

$$\frac{\text{площ. } ABC}{\text{площ. } ACK}=\frac{AB}{AK}=\frac{AB}{DE} \qquad [1]$$

(вмѣсто AK можно взять равный отрѣзокъ DE).

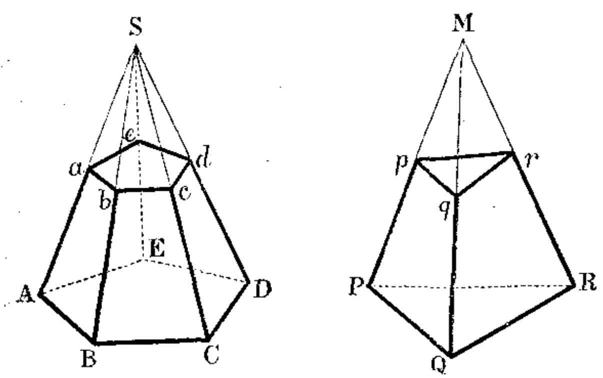
Треугольники ACK и DEF имѣютъ по равному углу при вершинахъ A и D; поэтому (**289**):

$$\frac{\text{площ. } ACK}{\text{площ. } DEF}=\frac{AC\,.\,AK}{DF\,.\,DE}=\frac{AC}{DF} \qquad [2]$$

(отрѣзки AK и DE, какъ равные, сокращаются).

Изъ подобія тр.-ковъ ABC и DEF слѣдуетъ, что правыя части равенствъ [1] и [2] равны; слѣд., равны и ихъ лѣвыя части, т. е.

$$\frac{\text{площ. } ABC}{\text{площ. } ACK}=\frac{\text{площ. } ACK}{\text{площ. } DEF}$$



Черт. 294

2°. Возьмемъ теперь многоугольную усѣченную пирамиду Ad, составляющую часть полной пирамиды $SABCDE$. Превратимъ мн.-къ $ABCDE$ въ равновеликій тр.-къ PQR и, принявъ этотъ тр.-къ за основаніе, построимъ вспомогательную пирамиду $MPQR$ съ такой же высотою, какъ у пирамиды S. Пересѣчемъ пирамиду M плоскостью pqr, параллельною основанію, на такомъ

разстояніи отъ вершины, на какомъ въ пирамидѣ S проведена плоскость $abcde$. Въ сѣченіи получится $\triangle\ pqr$, равновеликій мн.-ку $abcde$ (**374**). Пирамиды $SABCDE$ и $MPQR$ равновелики, такъ какъ у нихъ равновелики основанія и высоты равны; по той же причинѣ пирамиды $Sabcde$ и $Mpqr$ тоже равновелики; отсюда слѣдуетъ, что усѣч. многоугольная пирамида Ad равновелика усѣч. треугольной пирамидѣ Pr; такъ какъ у этихъ двухъ усѣченныхъ пирамидъ основанія, и нижнее, и верхнее, соотвѣтственно равновелики, а высоты равны, то теорема, доказанная для усѣченной треугольной пирамиды, остается примѣнимой и къ многоугольной.

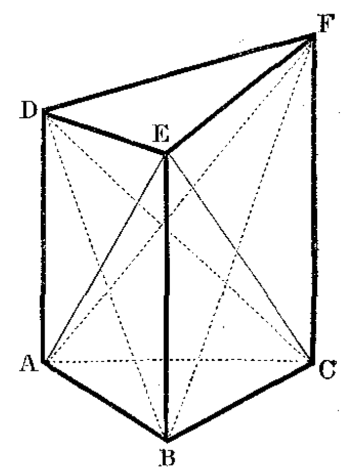
394. Слѣдствіе. Пусть V, B, b и H будутъ числа, выражающія въ соотвѣтствующихъ единицахъ объемъ, площадь нижняго основанія, площадь верхняго основанія и высоту усѣченной пирамиды; тогда

$$V=\frac{1}{3}BH+\frac{1}{3}bH+\frac{1}{3}H\sqrt{Bb}=\frac{1}{3}H\left(B+b+\sqrt{Bb}\right)$$

гдѣ $\sqrt{Bb}$ есть величина, средняя пропорціональная между B и b.

395. Теорема. *Объемъ треугольной призмы, усѣченной непараллельно основанію, равенъ суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ, имѣющихъ общее основаніе съ усѣченной призмой, а вершины въ трехъ вершинахъ непараллельнаго сѣченія.*

Пусть AF есть усѣченная треугольная призма. Проведя сѣкущую плоскость черезъ точки E, A и C, мы отдѣлимъ одну изъ трехъ пирамидъ, указанныхъ въ теоремѣ, именно пирамиду $EABC$, имѣющую общее основаніе ABC съ усѣченной призмой и вершину въ точкѣ E. Проведемъ еще сѣкущую плоскость черезъ точки E, D и C; тогда получимъ двѣ другія пирамиды: $EDAC$ и $EDFC$. Теорема будетъ доказана, если мы обнаружимъ, что эти пирамиды равновелики такимъ, у которыхъ основаніемъ служитъ $\triangle\ ABC$, а вершины лежатъ:



Черт. 295

одной въ D, другой въ F. Дѣйствительно: пирамиды $EDAC$ и $DABC$ равновелики, потому что за основаніе ихъ можно взять общій тр.-къ DAC, и тогда вершины E и B будутъ лежать на прямой BE, параллельной плоскости основаній; пирамиды $EDFC$ и $FABC$ равновелики, потому что за основанія ихъ можно принять равновеликіе тр.-ки: для первой DFC, для второй AFC; и тогда ихъ вершины E и B будутъ лежать на прямой BE, параллельной плоскости основаній.

396. Слѣдствіе. Пусть V, B, h_1, h_2, h_3 будутъ числа, выражающія въ соотвѣтствующихъ единицахъ объемъ, площадь основанія и высоты, опущенные на основаніе изъ трехъ вершинъ непараллельнаго сѣченія; тогда

$$V=\frac{1}{3}Bh_1+\frac{1}{3}Bh_2+\frac{1}{3}Bh_3=B\frac{h_1+h_2+h_3}{3}$$

Когда призма прямая, высоты h_1, h_2 и h_3 равны боковымъ ребрамъ ея.

ГЛАВА IV.

Подобіе многогранниковъ.

397. Опредѣленіе. Два многогранника наз. *подобными*, если они имѣютъ соотвѣтственно равные многогранные углы и соотвѣтственно подобныя грани. Соотвѣтственные элементы подобныхъ многогранниковъ наз. *сходственными*.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что въ подобныхъ многогранникахъ:

1°. *Двугранные углы соотвѣтственно равны и одинаково расположены*, потому что многогранные углы равны.

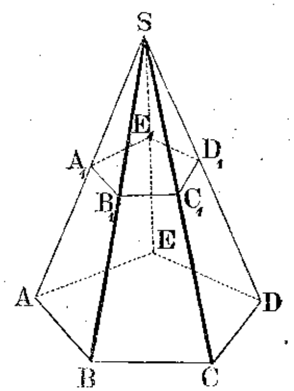
2°. *Сходственныя ребра пропорціональны*, потому что въ каждыхъ двухъ подобныхъ граняхъ отношеніе сходственныхъ реберъ одно и то же, и въ каждомъ многогранникѣ сосѣднія грани имѣютъ по общему ребру.

Возможность существованія подобныхъ многогранниковъ доказывается слѣдующей теоремой:

398. Теорема. *Если въ пирамидѣ* (черт. 296) *проведемъ сѣкущую*

плоскость $(A_1B_1C_1D_1E_1)$ *параллельно основанію, то отсѣчемъ отъ нея другую пирамиду* $(SA_1B_1C_1D_1E_1)$, *подобную данной.*

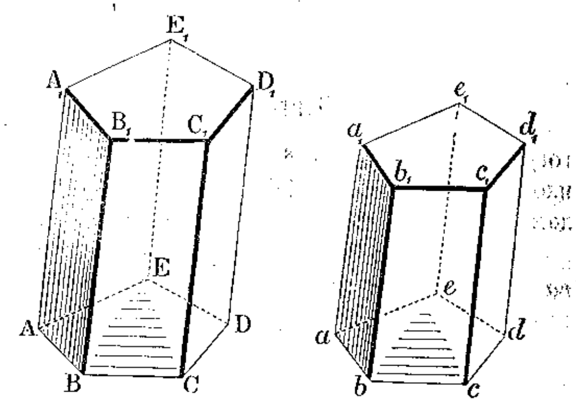
Такъ какъ $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$ и т. д. (332), то боковыя грани двухъ пирамидъ подобны; основанія ихъ также подобны (371). Остается доказать равенство многогранныхъ угловъ. Уголъ S у обѣихъ пирамидъ общій; трегранные углы A_1, B_1, C_1.... равны соотвѣтственно угламъ A, B, C,.. , потому что у каждой пары этихъ угловъ плоскіе углы соотвѣтственно равны и одинаково расположены (359;3°).



Черт. 296

399. Теорема. *Двѣ призмы, или двѣ пирамиды, подобны, если основаніе и боковая грань одной и основаніе и боковая грань другой соотвѣтственно подобны, одинаково наклонены и одинаково расположены.*

1°. Пусть у двухъ призмъ будутъ соотвѣтственно подобны и одинаково расположены основанія $ABCDE$, $abcde$ и грани AA_1B_1B, aa_1b_1b и кромѣ того равны двугранные углы AB и ab. Для доказательства подобія этихъ призмъ, разсуждаемъ въ такой послѣдовательности. Трегранные углы B и b равны, потому что они имѣютъ по равному двугранному углу (AB и ab), заключенному между двумя соотвѣтственно равными и одинаково расположенными плоскими углами ($ABC=abc$ и $ABB_1=abb_1$); отсюда слѣдуетъ, что равны плоскіе углы B_1BC и b_1bc, а также и двугранные BC и bc. Если же у двухъ параллелограммовъ BB_1C_1C и bb_1c_1c имѣется по одному равному углу, то и остальные углы ихъ соотвѣтственно равны; такъ какъ, сверхъ того,



Черт. 297

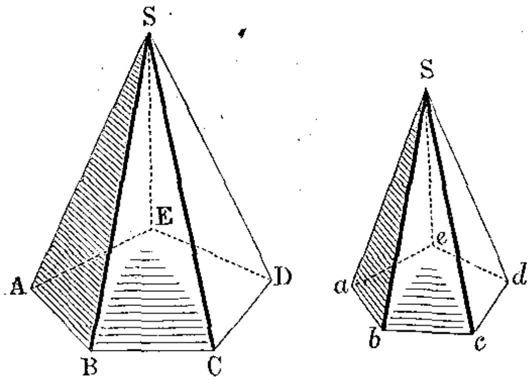
$$\frac{BC}{bc}=\frac{AB}{ab} \text{ (изъ подобія основаній)}$$

$$\text{и}\quad \frac{BB_1}{bb_1}=\frac{AB}{ab} \text{ (изъ подобія бок. граней),}$$

$$\text{то}\quad \frac{BC}{bc}=\frac{BB_1}{bb_1}$$

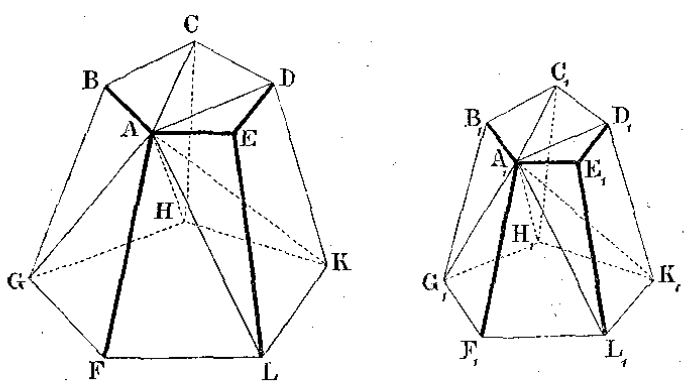
Значитъ, грани BB_1C_1C и bb_1c_1c подобны. Переходя теперь къ трегранным углам C и c, совершенно также убѣдимся, что они равны и что грани CC_1D_1D и cc_1d_1d подобны. Такимъ образомъ, мы переберемъ всѣ трегранные углы при основаніи *и всѣ боковыя грани.* Верхнія основанія $A_1B_1C_1D_1E_1$ и $a_1b_1c_1d_1e_1$ подобны, потому что они равны нижнимъ основаніямъ; трегранные углы при верхнихъ основаніяхъ соотвѣтственно равны, потому что у нихъ равны и одинаково расположены плоскіе углы. Значитъ, разсматриваемыя призмы подобны.

2⁰. Пусть теперь мы имѣемъ двѣ пирамиды, у которыхъ соотвѣтственно подобны и одинаково расположены основанія $ABCDE$, $abcde$ и боковыя грани SAB, sab и кромѣ того равны двугранные углы AB и ab. Совершенно такъ, какъ это было сдѣлано для призмъ, мы докажемъ, что всѣ трегранные углы, прилежащіе къ основаніямъ, соотвѣтственно равны, и что всѣ боковыя грани соотвѣтственно подобны. Тогда многогранные углы S и s также будутъ равны, потому что, имѣя всѣ плоскіе и двугранные углы соотвѣтственно равные и одинаково расположенные, они при вложеніи одного въ другой совмѣщаются.



Черт. 298

400. Теорема. *Подобные многогранники могутъ быть разложены на одинаковое число соотвѣтственно подобныхъ и одинаково расположенныхъ пирамидъ.*



Черт. 299

Указанное въ теоремѣ разложеніе можетъ быть выполнено различными способами. Мы поступимъ такъ.

Возьмемъ въ одномъ изъ данныхъ подобныхъ многогранниковъ вершину A какого-нибудь многограннаго угла. Возьмемъ далѣе всѣ тѣ грани многогранника, которыя не прилежатъ къ углу A. Въ нашемъ многогранникѣ такихъ граней четыре: $EDKL$, $DCHK$, $CBGH$ и $FGHKL$. Каждую изъ этихъ граней примемъ за основаніе такой пирамиды, которой вершина лежала бы въ A. Тогда многогранникъ разбивается на пирамиды, *сходящіяся вершинами* въ точку A. Въ другомъ многогранникѣ возьмемъ сходственную вершину A_1 и тѣмъ же путемъ разложимъ его на одинаковое число пирамидъ. Докажемъ, что эти пирамиды соотвѣтственно подобны. И дѣйствительно, какую бы пару соотвѣтственныхъ пирамидъ мы не взяли, легко найдемъ, что основаніе и грань одной пирамиды и основаніе и грань другой *пирамиды соотвѣтственно* подобны, одинаково наклонены и одинаково расположены. Напр., у пирамидъ $ADELK$, $A_1D_1E_1L_1K_1$ основанія $DELK$, $D_1E_1L_1K_1$ подобны, какъ сходственныя грани подобныхъ многогранниковъ, грани ADE, $A_1D_1E_1$ подобны, потому что подобные многоугольники $ABCDE$, $A_1B_1C_1D_1E_1$ разбиваются на соотвѣтственно подобные тр.-ки; двугранные углы DE, D_1E_1 равны, какъ сходственные углы подобныхъ многогранниковъ. Изъ этого слѣдуетъ, что взятыя нами пирамиды подобны. То же самое можно сказать о другихъ пирамидахъ.

401. Теорема. *Поверхности подобныхъ многогранниковъ относятся, какъ квадраты сходственныхъ реберъ.*

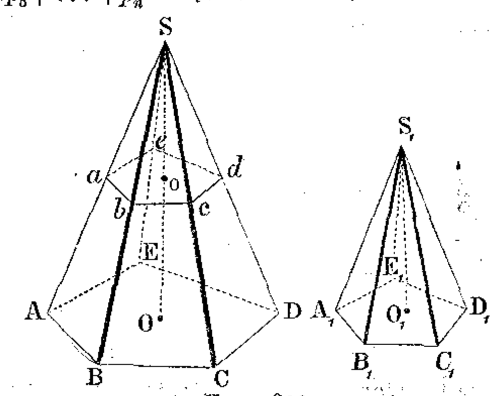
Пусть P_1, P_2, $P_3, \ldots P_n$ будутъ площади отдѣльныхъ граней одного изъ подобныхъ многогранниковъ, а $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ площади сходственныхъ граней другого; положимъ еще, что L и l будутъ длины двухъ какихъ-нибудь сходственныхъ реберъ. Тогда, вслѣдствіе подобія сходственныхъ граней и пропорціанальности всѣхъ сходственныхъ реберъ, будемъ имѣть (291):

$$\frac{P_1}{p_1}=\frac{L^2}{l^2};\quad \frac{P_2}{p_2}=\frac{L^2}{l^2};\quad \frac{P_3}{p_3}=\frac{L^2}{l^2};\ldots \frac{P_n}{p_n}=\frac{L^2}{l^2}$$

Откуда:
$$\frac{P_1+P_2+P_3+\ldots+P_n}{p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n}=\frac{L^2}{l^2}$$

402. Теорема. *Объемы подобныхъ многогранниковъ относятся, какъ кубы сходственныхъ реберъ.*

1⁰. Сначала докажемъ теорему для подобныхъ пирамидъ. Пусть пирамиды $SABCDE$ и $S_1A_1B_1C_1D_1E_1$ подобны. Вложимъ вторую пирамиду въ первую такъ, чтобы у нихъ совпали равные многогранные углы S и S_1. Тогда основаніе $A_1B_1C_1D_1E_1$ займетъ нѣкото-



Черт. 300

рое положеніе $abcde$, причемъ стороны ab, bc,.... будутъ соотвѣтственно параллельны сторонамъ AB, BC,.... (вслѣдствіе равенства плоскихъ угловъ трегранныхъ A и A_1, B и B_1 и т. д.); вслѣдствіе этого плоскость $abcde$ будетъ параллельна $ABCDE$ (331,2⁰). Пусть SO и So будутъ высоты двухъ пирамидъ. Тогда:

$$\text{Об. } SABCDE = (\text{площ. } ABCDE)\,.\,{}^1/_3 SO$$

$$\text{Об. } Sabcde = (\text{площ. } abcde)\,.\,{}^1/_3 So$$

Слѣд.
$$\frac{\text{Об. } SABCDE}{\text{Об. } Sabcde} = \frac{\text{площ. } ABCDE}{\text{площ. } abcde}\cdot\frac{SO}{So}$$

Но
$$\frac{\text{площ. } ABCDE}{\text{площ. } abcde} = \frac{SO^2}{So^2} \qquad (371,3^0)$$

Поэтому:
$$\frac{\text{об. } SABCDE}{\text{об. } Sabcde} = \frac{SO^3}{So^3} = \frac{SA^3}{Sa^3} = \cdots\cdots \qquad (371,1^0)$$

2⁰. Теперь докажемъ теорему для двухъ какихъ угодно подобныхъ многогранниковъ, объемы которыхъ назовемъ V и v. Разобьемъ ихъ на подобныя пирамиды (400). Пусть V_1, V_2, V_3....V_n и v_1, v_2, v_3....v_n будутъ объемы сходственныхъ пирамидъ, а L и l длины какихъ-нибудь сходственныхъ реберъ. Тогда, согласно доказанному, будемъ имѣть:

$$\frac{V_1}{v_1} = \frac{L^3}{l^3};\quad \frac{V_2}{v_2} = \frac{L^3}{l^3};\ \ldots\ \frac{V_n}{v_n} = \frac{L^3}{l^3}$$

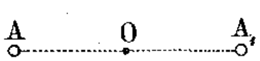
Откуда:
$$\frac{V_1 + V_2 + \ldots V_n}{v_1 + v_2 + \ldots v_n} = \frac{L^3}{l^3}$$

т.-е.
$$\frac{V}{v} = \frac{L^3}{l^3}$$

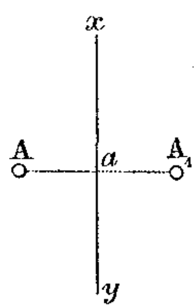
ГЛАВА V.

Симметричныя фигуры

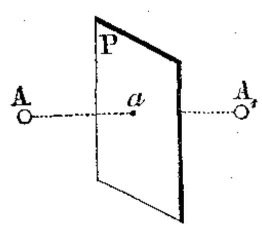
403. Опредѣленія. Различаютъ три рода *симметріи:* относительно точки, относительно прямой и относительно плоскости.



Черт. 301



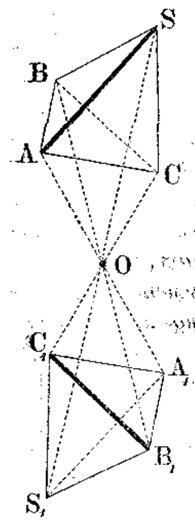
Черт. 302



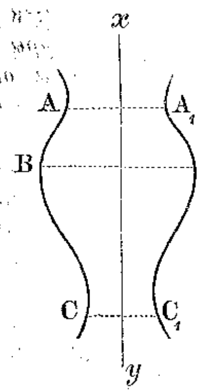
Черт. 303

Двѣ точки A и A_1 (черт. 301) наз. симметричными относительно точки O *(центра симметріи)*, если прямая AA_1 проходитъ черезъ точку O и дѣлится ею пополамъ. Двѣ точки A и A_1 (черт. 302 и 303) наз. симметричными относительно прямой xy *(оси симметріи)* или относительно плоскости P *(плоскости симметріи)*, если прямая AA_1 перпендикулярна къ xy или къ плоскости P и дѣлится ими пополамъ.

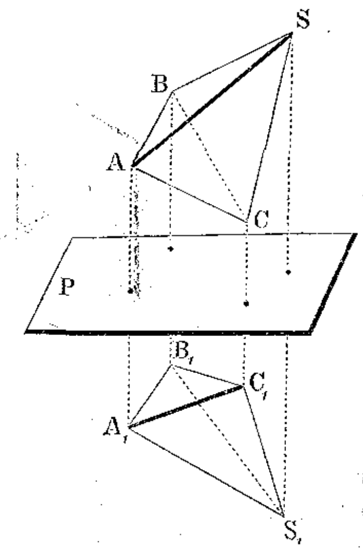
Двѣ фигуры наз. симметричными относительно центра (черт. 304), оси (черт. 305), или плоскости (черт. 306), если каждой точкѣ одной фигуры соотвѣтствуетъ симметричная точка другой. Симметричныя точки двухъ такихъ фигуръ наз. *сходственными.*



Черт. 304



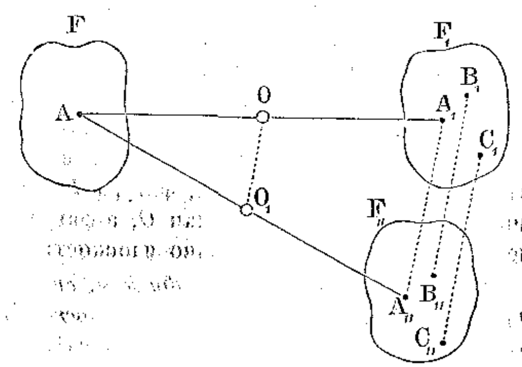
Черт. 305



Черт. 306

404. Замѣтимъ прежде всего, что *двѣ фигуры, симметричныя относительно оси, равны.* Въ этомъ убѣдимся, если повернемъ одну изъ фигуръ (черт. 305) вокругъ оси на 180⁰. Тогда каждая точка A одной фигуры совпадаетъ съ сходственной точкой A_1 другой фигуры, и, слѣд., обѣ фигуры совмѣстятся.

405. Теорема. *Фигуры, симметричныя съ одной и той же фигурой относительно различныхъ центровъ, равны.*

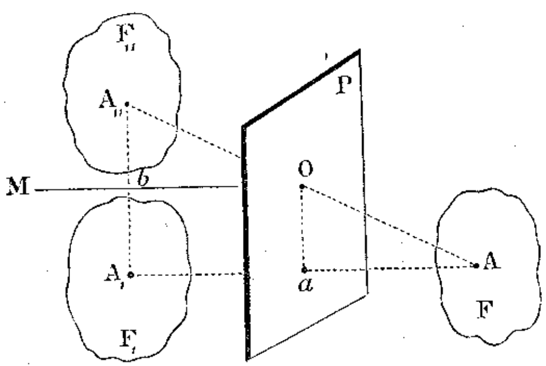


Черт. 307

Пусть фигуры F_1 и F_{11} симметричны съ одной фигурой F относительно центровъ O и O_1 (черт. 307).

Возьмемъ въ фигурѣ F произвольную точку A и въ фигурахъ F_1 и F_{11} точки A_1 и A_{11}, симметричныя съ A; затѣмъ проведемъ прямыя OO_1 и A_1A_{11}. Такъ какъ $AO=A_1O$ и $AO_1=A_{11}O_1$, то $A_1A_{11} \parallel OO_1$ и $A_1A_{11}=2OO_1$. Такимъ образомъ, всѣ соотвѣтственныя точки фигуръ F_1 и F_{11} (напр., A_1 и A_{11}, B_1 и B_{11}, C_1 и C_{11} и т. д.) лежатъ на разстояніяхъ, параллельныхъ прямой OO_1 и равныхъ $2OO_1$. Поэтому если перемѣстимъ фигуру F_1 такъ, чтобы каждая ея точка описала прямую, параллельную OO_1 и равную удвоенной этой линіи, то обѣ фигуры совмѣстятся; значитъ, онѣ равны.

406. Теорема. *Если фигуры F и F* (черт. 308) *симметричны относительно плоскости P, то ихъ можно помѣстить такъ, что онѣ будутъ симметричны относительно любой точки O, взятой на плоскости P;* и обратно: *если фигуры F и F_{11} симметричны относительно точки O, то ихъ можно помѣстить такъ, что онѣ будутъ симметричны относительно любой плоскости P, проходящей черезъ точку O.*



Черу. 308

Если фигуры F и F_1 симметричны относительно плоскости P, то прямая AA_1, соединяющая какія-нибудь двѣ сходственныя точки, перпендикулярна къ плоскости P и дѣлится ею пополамъ; значитъ: $Aa=A_1a$. Если фигуры F и F_{11} симметричны относительно точки O, то прямая AA_{11}, соединяющая двѣ сходственныя точки, проходитъ черезъ O и дѣлится этою точкою пополамъ; значитъ: $AO=A_{11}O$. Замѣтивъ это, соединимъ A_1 съ A_{11} и проведемъ OM перпендикулярно къ P. Такъ какъ $AO=A_{11}O$ и $Aa=A_1a$, то $A_1A_{11} \parallel aO$; слѣд. $\angle A_{11}A_1A=\angle OaA=d$. Такъ какъ $OM \perp P$ и $AA_1 \perp P$, то $OM \parallel AA_1$; изъ этого слѣдуетъ, что, во 1^0, OM пересѣкается съ A_1A_{11} въ нѣкоторой точкѣ b, во 2^0, $\angle A_{11}bO=\angle A_{11}A_1A=d$, въ 3^0, $A_1b=A_{11}b$ (такъ какъ $A_{11}O=OA$). Если мы теперь повернемъ фигуры F_1 и F_{11} вокругъ оси OM на 180^0, то точки A_1 и A_{11}, а слѣд. и всѣ другія сходственныя точки, помѣняются мѣстами; значитъ, фигура F_1 можетъ быть сдѣлана симметричною съ F относительно точки O, а фигура F_{11} можетъ быть сдѣлана симметричною съ F относительно плоскости P; что и требовалось доказать.

407. Слѣдствіе. 1^0. *Фигуры, симметричныя съ одной и той же фигурой относительно различныхъ плоскостей, равны между собою,* потому что эти фигуры всегда можно сдѣлать симметричными съ одной и той же фигурой относительно двухъ центровъ, а такія фигуры равны (**405**).

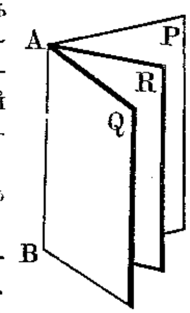
2^0. Если будемъ обращать вниманіе только на *форму* фигуры, а не на ея положеніе въ пространствѣ, то можемъ сказать, что *данная фигура F имѣетъ только единственную симметричную съ нею фигуру* (относительно точки, или относительно плоскости, все равно), такъ какъ всѣ фигуры, симметричныя съ F, равны между собою. Вслѣдствіе этого, при изслѣдованіи свойствъ симметричныхъ фигуръ, зависящихъ только отъ ихъ формы, мы можемъ по произволу разсматривать эти фигуры или какъ симметричныя относительно центра, или какъ симметричныя относительно плоскости.

408. Теоремы, выражающія свойства симметричныхъ фигуръ.

1^0. *Фигура, симметричная съ плоской фигурой, есть также плоская фигура, равная первой.*

Это свойство сдѣлается очевиднымъ, если возьмемъ за плоскость симметріи плоскость данной фигуры; тогда симметричная фигура сливается съ данной.

Въ частности, фигура, симметричная съ отрѣзкомъ прямой, есть равный отрѣзокъ прямой; фигура, симметричная съ угломъ, есть равный уголъ; фигура, симметричная съ плоскимъ многоугольникомъ, есть равный плоскій многоугольникъ; фигура, симметричная съ кругомъ, есть равный кругъ; и т. п.



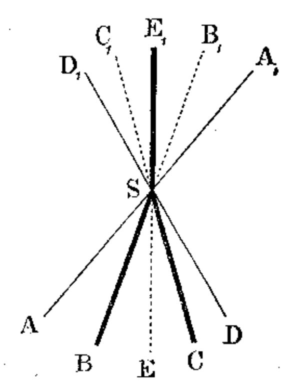
Черт. 309

2^0. *Фигура, симметричная съ двугранньмъ угломъ* ($PABQ$, черт. 309), *есть равный двугранный уголъ.*

Это свойство сдѣлается очевиднымъ, если за плоскость симметріи возьмемъ *биссектриссную* плоскость R. Тогда фигура, симметричная съ гранью P, будетъ другая грань Q, и наоборотъ; слѣд. фигура, симметричная съ угломъ $PABQ$, будетъ уголъ $QABP$.

3^0. *Фигура, симметричная съ многограннымъ угломъ,* ($SABCDE$ черт. 310), *есть многогранный уголъ, у котораго двугранные и плоскіе углы соотвѣтственно равны двуграннымъ и плоскимъ угламъ перваго многограннаго угла, но расположены въ обратномъ порядкѣ.*

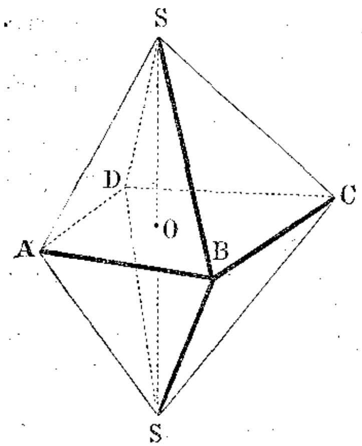
Это свойство сдѣлается очевиднымъ, если возьмемъ за центръ симметріи вершину S. Тогда получимъ два симметричные угла $SABCDE$ и $SA_1B_1C_1D_1E_1$, у которыхъ двугранные и плоскіе углы соотвѣтственно равны, но расположены въ обратномъ порядкѣ (**360**).



Черт. 310

Слѣдствіе. *Симметричные многогранные углы вообще не равны,* такъ какъ, вслѣдствіе обратнаго расположенія равныхъ двугранныхъ угловъ, они не могутъ совмѣститься. По той же причинѣ *симметричные многогранники вообще не равны.*

4°. *Два симметричные многогранника равновелики.*



Черт. 311

Докажемъ сначала эту теорему для симметричныхъ пирамидъ $SABCD$ и S_1ABCD, которыя мы размѣстимъ такъ, чтобы плоскостью симметріи служило основаніе $ABCD$. Такъ какъ точки S и S_1 *симметричны относительно плоскости* основанія, то высоты SO и S_1O равны; вслѣдствіе этого пирамиды, имѣя общее основаніе и равныя высоты, равновелики. Два какіе угодно симметричные многогранника всегда могутъ быть разложены на одинаковое число симметричныхъ пирамидъ; поэтому теорема вѣрна и для многогранниковъ произвольной формы.

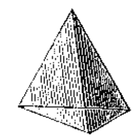
ГЛАВА VI.

Понятіе о правильныхъ многогранникахъ.

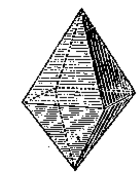
409. Опредѣленіе. Многогранникъ наз. *правильнымъ*, если всѣ его грани суть равные правильные многоугольники и всѣ многогранные углы равны. Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что въ правильныхъ многогранникахъ равны всѣ плоскіе углы, всѣ двугранные углы и всѣ ребра.

410. Чтобы опредѣлить, *какіе правильные многоугольники могутъ служить гранями правильныхъ многогранниковъ*, примемъ во вниманіе, что во всякомъ многогранномъ углѣ сумма плоскихъ угловъ меньше $4d$ (**355**). Каждый уголъ правильнаго треугольника равенъ $^2/_3 d$. Повторяя $^2/_3 d$ слагаемымъ 3 раза, 4 раза и 5 разъ, мы получаемъ суммы, меньшія $4d$; а повторяя $^2/_3 d$ слагаемымъ бо́льшее число разъ, мы получаемъ въ суммѣ $4d$ или болѣе. Поэтому изъ плоскихъ угловъ, равныхъ угламъ правильнаго тр.-ка, можно образовать многогранные углы только трехъ видовъ: трегранные, четырегранные и пятигранные. Уголъ квадрата равенъ d, а уголъ правильнаго пятиугольника равенъ $^6/_5 d$; повторяя эти углы слагаемымъ не болѣе 3-хъ разъ, получаемъ суммы,

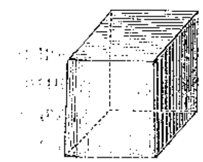
меньшія $4d$. Поэтому изъ плоскихъ угловъ, равныхъ угламъ квадрата или правильнаго пятиугольника, можно образовать только трегранные углы. Уголъ правильнаго шестиугольника равенъ $^4/_3 d$; поэтому изъ такихъ угловъ нельзя образовать даже трегранного угла. Изъ угловъ правильныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ болѣе 6-ти сторонъ, и подавно нельзя образовать никакого многограннаго угла.



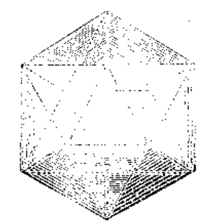
Черт. 312



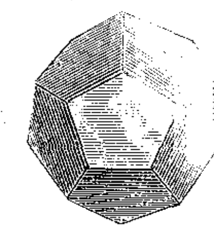
Черт. 313



Черт. 314



Черт 315.



Черт 316.

411. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что правильныхъ многогранниковъ не можетъ быть болѣе слѣдующихъ пяти:

1°. *Правильный четырегранникъ* (или тетраэдръ), котораго поверхность составлена изъ 4-хъ правильныхъ треугольниковъ (черт. 312).

2°. *Правильный восьмигранникъ* (или октаэдръ), котораго поверхность составлена изъ 8-ми правильныхъ тр.-ковъ (черт. 313).

3°. *Правильный двадцатигранникъ* (или икосаэдръ), образованный 20-ю правильными тр.-ками (черт. 315).

4°. *Правильный шестигранникъ* (или эксаэдръ), образованный 4-мя квадратами (черт. 314). Онъ наз. иначе *кубомъ*.

5°. *Правильный двѣнадцатигранникъ* (или додекаэдръ), образованный 12-ю правильными пятиугольниками (черт. 316).

ЗАДАЧИ.

335. Вычислить поверхность и объемъ прямой призмы, у которой основаніе правильный тр.-къ, вписанный въ кругъ радіуса $r=2$ метрамъ, а высота равна сторонѣ правильнаго 6-угольника, описаннаго около того же круга.

336. Опредѣлить поверхность и объемъ правильной 8-угольной призмы, у которой высота $h=6$ арш., а сторона основанія $a=8$ вершк.

337. Опредѣлить боковую поверхность и объемъ прав. шестиугольной пирамиды, у которой высота равна 1 метру, а апоѳема составляетъ съ высотою уголъ въ 30^0.

338. Вычислить объемъ треуг. пирамиды, у которой каждое боковое ребро равно l, а стороны основанія суть a, b и c.

339. Данъ трегранный уголъ $SABC$, у котораго всѣ три плоскіе угла прямые. На его ребрахъ отложены длины: $SA=a$, $SB=b$ и $SC=c$. Черезъ точки A, B и C проведена плоскость. Опредѣлить объемъ пирамиды $SABC$.

340. Высота пирамиды равна h, а основаніе—правильный шестиугольникъ со стороною a. На какомъ разстояніи x отъ вершины пирамиды слѣдуетъ провести плоскость, параллельную основанію, чтобы объемъ образовавшейся усѣченной пирамиды равнялся V.

341. Опредѣлить объемъ правильнаго тетраэдра съ ребромъ a.

342. Опредѣлить объемъ прав. октаэдра съ ребромъ a.

343. Усѣченная пирамида, которой объемъ $V=1465$ куб. сантим., имѣетъ основаніями правильные шестиугольники со сторонами: $a=23$ и $b=17$ сант. Вычислить высоту этой пирамиды.

344. Объемъ V усѣченной пирамиды равенъ 10,5 куб. метра, высота $h=\sqrt{3}$ метр. и сторона a правильнаго шестиугольника, служащаго нижнимъ основаніемъ, равна 2 метр. Вычислить сторону прав. шестиугольника, служащаго верхнимъ основаніемъ.

345. Вычислить объемъ треугольной усѣченной призмы, у которой стороны основанія суть: $a=7{,}5$, $b=7$ и $c=6{,}5$, а ребра, перпендикулярныя къ основанію, суть: $k=2$, $l=3$ и $m=4$.

346. На какомъ разстояніи отъ вершины S пирамиды $SABC$ надо провести плоскость, параллельную основанію, чтобы отношеніе объемовъ частей, на которыя разсѣкается этою плоскостью пирамида, равнялось m.

347. Вычислить объемъ усѣченнаго параллелопипеда, у котораго основаніе есть B, а h_1, h_2, h_3 и h_4 суть длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ верхняго основанія на плоскость нижняго основанія.

348. Пирамида съ высотою h раздѣлена плоскостями, параллельными основанію, на три части въ отношеніи $m:n:p$. Опредѣлить разстояніе этихъ плоскостей до вершины пирамиды.

349. Сумма объемовъ двухъ подобныхъ многогранниковъ равна V, а отношеніе сходственныхъ реберъ равно $m:n$. Опредѣлить объемы ихъ.

350. Раздѣлить объемъ усѣченной пирамиды плоскостью, параллельною основаніямъ B и b, на двѣ части въ отношеніи $m:n$.

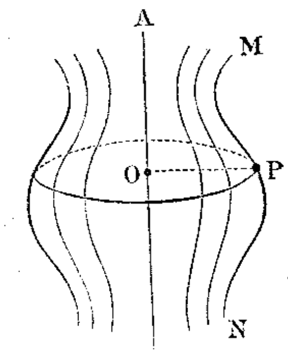
КНИГА III.

КРУГЛЫЯ ТѢЛА.

ГЛАВА I.

Цилиндръ и конусъ.

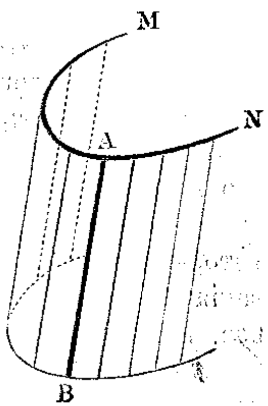
412. Поверхность вращенія. Такъ наз. поверхность, которая получается отъ вращенія какой-нибудь неизмѣняющейся линіи MN, называемой *образующею*, вокругъ неподвижной прямой AB, называемой *осью*; при этомъ предполагается, что образующая MN, при своемъ вращеніи, неизмѣнно связана съ осью AB.



Черт. 317

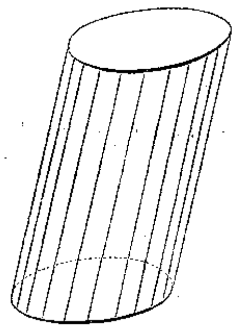
Возьмемъ на образующей какую-нибудь точку P и опустимъ изъ нея на ось перпендикуляръ PO. Очевидно, что при вращеніи не измѣняются ни длина этого перпендикуляра, ни величина угла AOP, ни положеніе точки O. Поэтому каждая точка образующей описываетъ окружность, которой плоскость перпендикулярна къ оси и центръ лежитъ на пересѣченіи этой плоскости съ осью. Отсюда слѣдуетъ, что плоскость, перпендикулярная къ оси, пересѣкаясь съ поверхностью вращенія, даетъ въ сѣченіи окружность.

Всякая сѣкущая плоскость, проходящая черезъ ось, наз. *меридіанальною* плоскостью, а пересѣченіе ея съ поверхностью вращенія—*меридіаномъ*. Всѣ меридіаны равны между собою, потому что при вращеніи каждый изъ нихъ проходитъ черезъ то положеніе, въ которомъ ранѣе былъ всякій другой меридіанъ.



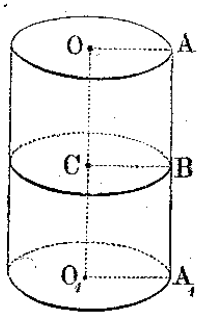
Черт. 318

413. Цилиндрическая поверхность. Такъ наз. поверхность, производимая движеніемъ прямой AB (черт. 318), перемѣщающейся въ пространствѣ параллельною данному направленію и пересѣкающей при этомъ данную линію MN. Прямая AB наз. *образующею*, а линія MN *направляющею*.



Черт. 319

414. Цилиндръ. Тѣло, ограниченное цилиндрическою поверхностью и двумя параллельными плоскостями, наз. *цилиндромъ* (черт. 319). Часть цилиндрической поверхности, заключенная между плоскостями, наз. *боковою поверхностью* цилиндра, а части плоскостей, отсѣкаемыя этою поверхностью,—*основаніями* цилиндра. Разстояніе между основаніями есть *высота* цилиндра. Цилиндръ наз. *прямымъ* или *наклоннымъ*, смотря по тому, перпендикулярны или наклонны къ основаніямъ его образующія.



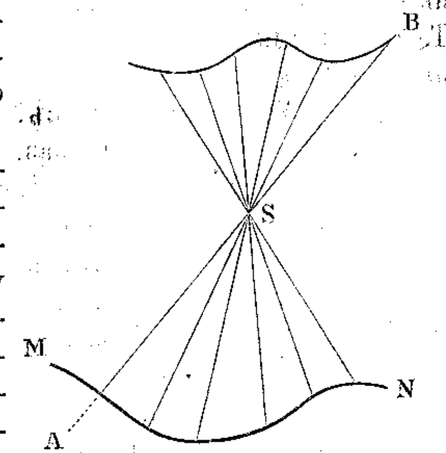
Черт. 320

Прямой цилиндръ (черт. 320) наз. *круговымъ*, если его основанія круги. Такой цилиндръ можно разсматривать, какъ тѣло, происходящее отъ вращенія прямоугольника OAA_1O_1 вокругъ стороны OO_1, какъ оси; при этомъ сторона AA_1 описываетъ боковую поверхность, а стороны OA и O_1A_1—круги основаній. Всякая прямая BC, параллельная OA, описываетъ также кругъ, перпендикулярный къ оси. Отсюда слѣдуетъ, что сѣченіе прямого кругового цилиндра плоскостью, параллельною основаніямъ, есть кругъ. Въ элементарной геометріи разсматривается только прямой круговой цилиндръ; для краткости его называютъ просто *цилиндромъ*.

Иногда приходится разсматривать такія прямыя призмы, которыхъ основанія суть многоугольники, вписанные въ основанія цилиндра, или описанные около нихъ; такія призмы наз. *вписанными* въ цилиндрѣ, или *описанными* около него.

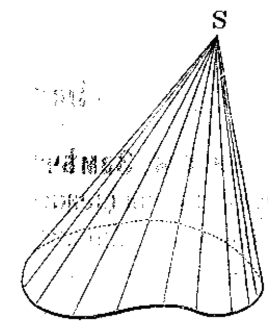
415. Коническая поверхность. Такъ наз. поверхность, производимая движеніемъ прямой AB (черт. 321), перемѣщающейся въ пространствѣ такъ, что она при этомъ постоянно проходитъ

черезъ неподвижную точку S и пересѣкаетъ данную линію MN. Прямая AB наз. *образующею*, линія MN—*направляющею*, а точка S *вершиною* конической поверхности.



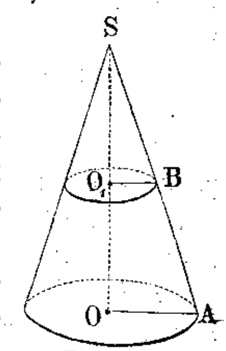
Черт. 321

416. Конусъ. Тѣло, ограниченное коническою поверхностью и плоскостью, пересѣкающею всѣ образующія по одну сторону отъ вершины, наз. *конусомъ* (черт. 332). Часть конической поверхности, ограниченная этою плоскостью, наз. *боковою поверхностью*, а часть плоскости, отсѣкаемая боковою поверхностью,—*основаніемъ* конуса. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины на основаніе, есть *высота* конуса.



Черт. 322

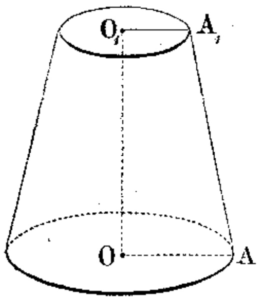
Конусъ наз. *прямымъ круговымъ*, если его основаніе есть кругъ, а высота проходитъ черезъ центръ основанія (черт. 323). Такой конусъ можно разсматривать, какъ тѣло, происходящее отъ вращенія прямоугольнаго тр.-ка SOA вокругъ катета SO, какъ оси. При этомъ гипотенуза SA производитъ боковую поверхность, а катетъ OA—основаніе конуса. Всякая прямая BO_1, параллельная AO, описываетъ при вращеніи кругъ, перпендикулярный къ оси. Отсюда слѣдуетъ, что сѣченіе прямого кругового конуса плоскостью, параллельною основанію, есть кругъ. Въ элементарной геометріи разсматривается только прямой круговой конусъ, который для краткости наз. просто *конусомъ*.



Черт. 323

Иногда приходится разсматривать такія пирамиды, которыхъ основанія суть многоугольники, вписанные въ основаніе конуса, или опинные около него, а вершина совпадаетъ съ вершиною конуса. Такія пирамиды наз. *вписанными* въ конусъ, или *описанными* около него.

417. Усѣченный конусъ. *Усѣченнымъ* конусомъ (черт. 324) наз. часть полнаго конуса, заключенная между основаніемъ и сѣкущею плоскостью, параллельною основанію. Параллельные круги, ограничивающіе усѣченный конусъ, наз. *основаніями* его. Усѣченный конусъ можно разсматривать, какъ тѣло, происходящее отъ вращенія прямоугольной трапеціи OAA_1O_1 вокругъ стороны OO_1, перпендикулярной къ основаніямъ трапеціи.



Черт. 324

Поверхность цилиндра и конуса.

418. Замѣчаніе. Боковыя поверхности цилиндра и конуса принадлежатъ къ поверхностямъ *кривымъ*, т. е. такимъ, которыхъ никакая часть не можетъ совмѣститься съ плоскостью. Поэтому мы должны опредѣлить, что разумѣютъ подъ величиною боковой поверхности цилиндра или конуса, когда сравниваютъ эти поверхности съ *плоскою* квадратною единицею.

419. Опредѣленія. *Боковою поверхностью цилиндра* (при измѣреніи ея квадратною единицею) *наз. предѣлъ, къ которому стремится боковая поверхность правильной вписанной призмы, при неограниченномъ удвоеніи числа ея боковыхъ граней.*

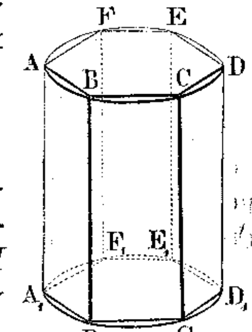
Боковою поверхностью конуса (при измѣреніи ея квадратною единицею) *наз. предѣлъ, къ которому стремится боковая поверхность правильной вписанной пирамиды при неограниченномъ удвоеніи числа ея боковыхъ граней.*

420. Теорема. *Боковая поверхность цилиндра равна произведенію окружности основанія на высоту.*

Впишемъ въ цилиндръ какую-нибудь правильную призму и

обозначимъ черезъ s, p и H числа, выражающія въ соотвѣтствующихъ единицахъ боковую поверхность, периметръ основанія и высоту этой призмы. Тогда будемъ имѣть (**376**):

$$s = pH$$



Черт. 325

Предположимъ теперь, что число боковыхъ граней вписанной призмы неограниченно удваивается; тогда величины s и pH сдѣлаются перемѣнными, но равенство между ними не нарушится. Поэтому (**250**) равенство останется вѣрнымъ и тогда, когда вмѣсто перемѣнныхъ подставимъ ихъ предѣлы. Предѣлъ p есть длина окружности основанія (**256**), а предѣлъ s есть то, что наз. боковою поверхностью цилиндра. Значитъ, обозначивъ первую черезъ C, а вторую черезъ S, получимъ:

$$S = CH$$

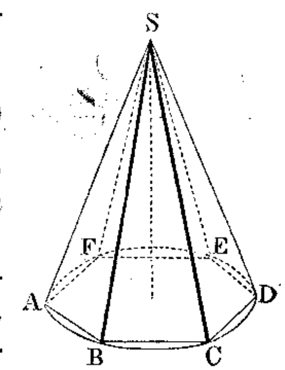
421. Слѣдствія. 1°. Если R означаетъ радіусъ основанія цилиндра, то $C = 2\pi R$; поэтому боковая поверхность цилиндра выразится:

$$S = 2\pi RH$$

2°. Чтобы получить *полную* поверхность цилиндра, достаточно къ боковой поверхности приложить сумму площадей двухъ основаній; поэтому, обозначая полную поверхность черезъ T, будемъ имѣть:

$$T = 2\pi RH + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi R(R+H)$$

422. Теорема. *Боковая поверхность конуса равна произведенію окружности основанія на половину образующей.*



Черт. 326.

Впишемъ въ конусъ какую-нибудь правильную пирамиду и обозначимъ черезъ s, p и l числа, выражающія въ соотвѣтствующихъ единицахъ боковую поверхность, периметръ основанія и апоѳему этой пирамиды. Тогда будемъ имѣть (**377**):

$$s = \frac{1}{2}pl$$

Предположимъ теперь, что число боковыхъ граней вписанной пирамиды неограниченно удваивается; тогда величины s и $^1/_2\ pl$ сдѣлаются перемѣнными, но равенство между ними не нарушится. Поэтому оно останется вѣрнымъ и тогда, когда вмѣсто перемѣнныхъ подставимъ ихъ предѣлы. Предѣлъ p есть длина окружности основанія, предѣлъ l есть образующая конуса, а предѣлъ s есть то, что наз. боковою поверхностью конуса. Значитъ, обозначая эти величины соотвѣтственно черезъ C, L и S, получимъ:

$$S=\frac{1}{2}\,CL$$

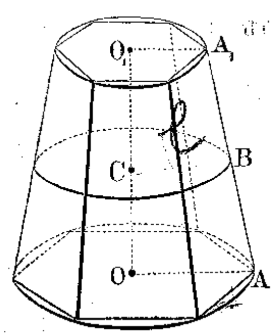
423. Слѣдствіе. 1°. Такъ какъ $C=2\pi R$, то боковая поверхность конуса выразится:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\pi RL=\pi RL$$

2°. Полную поверхность конуса получимъ, если къ боковой поверхности приложимъ площадь основанія; поэтому:

$$T=\pi RL+\pi R^2=\pi R\,(R+L)$$

424. Теорема. *Боковая поверхность усѣченнаго конуса равна произведенію полусуммы окружностей основаній на образующую.*



Черт. 327

Впишемъ въ усѣченный конусъ какую-нибудь правильную усѣченную пирамиду и обозначимъ черезъ s, p, p_1 и l числа, выражающія боковую поверхность, периметръ нижняго, периметръ верхняго оснований и апоѳему этой пирамиды. Тогда будемъ имѣть (**378**):

$$s=\frac{1}{2}\,(p+p_1)\,l$$

Изъ этого равенства, разсуждая подобно предыдущему, выводимъ:

$$S=\frac{1}{2}\,(C+C_1)\,L$$

гдѣ S есть боковая поверхность усѣченнаго конуса, C и C_1 длины окружностей основаній, а L образующая.

425. Слѣдствія. 1°. Если R и R_1 будутъ радіусы окружностей нижняго и верхняго основаній, то боковая поверхность усѣченнаго конуса выразится:

$$S=\frac{1}{2}\,(2\pi R+2\pi R_1)\,L=\pi\,(R+R_1)\,L$$

2°. Проведемъ въ трапеціи OO_1A_1A (черт. 327), отъ вращенія которой получается усѣченный конусъ, среднюю линію BC (**103**). Тогда получимъ:

$$BC=\frac{1}{2}\,(OA+O_1A_1)=\frac{1}{2}\,(R+R_1)$$

Откуда: $R+R_1=2BC$

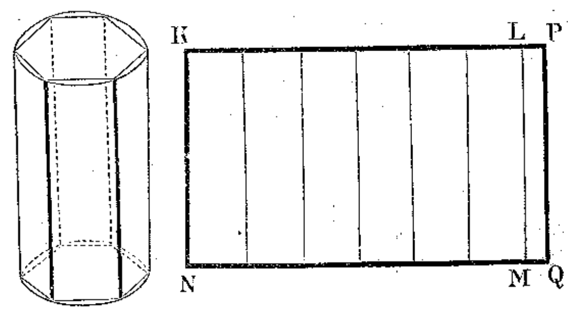
Слѣд.: $S=2\pi BC.L$

т.-е. *боковая поверхность усѣченнаго конуса равна произведенію окружности средняго сѣченія на образующую.*

3°. Полная поверхность T усѣченнаго конуса выразится такъ:

$$T=\pi\,(R^2+R_1^2+RL+R_1L)$$

426. Замѣчаніе. Въ предыдущихъ теоремахъ боковыя поверхности цилиндра и конуса разсматривались, какъ предѣлы боковыхъ поверхностей правильныхъ *вписанныхъ* призмъ или пирамидъ. Если бы, подобно тому, какъ мы это дѣлали при доказательствѣ этихъ теоремъ, мы стали находить предѣлы *описанныхъ* призмъ или пирамидъ, то нашли бы, что эти предѣлы тѣ же самые, какъ и для вписанныхъ призмъ или пирамидъ. Вслѣдствіе этого боковыя поверхности цилиндра и конуса можно разсматривать, какъ *общій предѣлъ* боковыхъ поверхностей правильныхъ призмъ или пирамидъ, какъ вписанныхъ, такъ и описанныхъ.

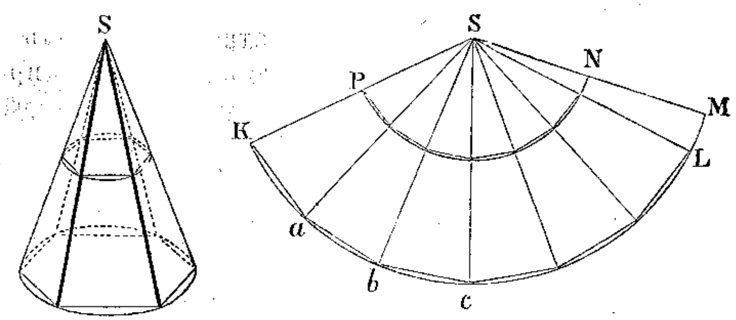


Черт. 328

427. Развертка цилиндра и конуса. Впишемъ въ цилиндръ (черт. 328) какую-нибудь правильную призму и затѣмъ вообразимъ, что боковая ея поверхность разрѣзана вдоль какого-нибудь бокового ребра. Очевидно, что вращая ея грани вокругъ реберъ, мы можемъ *развернуть* эту поверхность въ одну плоскость, безъ разрыва и безъ складокъ. Тогда получится то, что наз. *разверткою* боковой поверхности прав. призмы. Она представляетъ собою прямоугольникъ $KLMN$, составленный изъ столькихъ равныхъ прямоугольниковъ, сколько въ призмѣ боковыхъ граней. Основаніе его MN равно периметру основанія призмы, а высота KN есть высота призмы.

Вообразимъ теперь, что число боковыхъ граней вписанной призмы неограниченно удваивается; тогда ея развертка будетъ все удлиняться, приближаясь къ *предѣльному* прямоугольнику $KPQN$, у котораго основаніе равно длинѣ окружности основанія цилиндра, а высота есть высота цилиндра. Этотъ прямоугольникъ наз. *разверткою* боковой поверхности цилиндра.

Подобно этому вообразимъ, что въ конусъ вписана правильная пирамида (черт. 329). Мы можемъ разрѣзать ея боковую поверхность по какому-нибудь ребру и затѣмъ, повертывая грани вокругъ реберъ, получить ея развертку въ видѣ многоугольнаго сектора SKL, составленнаго изъ



Черт. 329

столькихъ равныхъ равнобедр. тр.-ковъ, сколько въ пирамидѣ боковыхъ граней. Прямыя SK, Sa, Sb... равны боковому ребру пирамиды (или образующей конуса), а длина ломаной $Kab...L$ равна периметру основанія пирамиды. При неограниченномъ удвоеніи числа боковыхъ граней вписан. пирамиды развертка ея увеличивается, приближаясь къ *предѣльному* сектору SKM, у котораго дуга KM равна окружности основанія, а радіусъ SK—образующей конуса. Этотъ секторъ наз. *разверткою* боковой поверхности конуса.

Подобно этому можно получить развертку боковой поверхности усѣчен. конуса (черт. 329) въ видѣ части кругового кольца $KMNP$.

Объемъ цилиндра и конуса.

428. Лемма 1. *Объемъ цилиндра есть общій предѣлъ объемовъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ призмъ при неограниченномъ удвоеніи числа ихъ боковыхъ граней.*

Впишемъ въ цилиндръ и опишемъ около него по какой-нибудь правил. одноименной призмѣ. Обозначимъ объемъ, площадь основанія и высоту соотвѣтственно: для цилиндра— V, B, H, для вписанной призмы— V_1, B_1, H и для описанной призмы— V_2, B_2, H. Тогда будемъ имѣть (**388**):

$$V_2 = B_2 H \qquad V_1 = B_1 H$$

Откуда: $$V_2 - V_1 = (B_2 - B_1) H$$

При неограниченномъ удвоеніи числа боковыхъ граней призмъ, разность $B_2 - B_1$ стремится къ нулю (**295**), а множитель H есть число постоянное; поэтому правая часть послѣдняго равенства, а слѣд. и его лѣвая часть стремится къ нулю. Объемъ цилиндра, очевидно, больше объема вписанной призмы, но меньше объема описанной; поэтому каждая изъ разностей $V - V_1$ и $V_2 - V$ меньше разности $V_2 - V_1$; но послѣдняя, по доказанному, стремится къ нулю; слѣд., и первыя стремятся къ нулю; а это, по опредѣленію предѣла, означаетъ, что

$$V = \text{пред.}\ V_1 = \text{пред.}\ V_2$$

429. Лемма 2. *Объемъ конуса есть общій предѣлъ объемовъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ пирамидъ при неограниченномъ удвоеніи числа ихъ боковыхъ граней.* Впишемъ въ конусъ и опишемъ около него по какой-нибудь прав. одноименной пирамидѣ. Употребляя тѣ же обозначенія, какъ и въ предыдущемъ параграфѣ, будемъ имѣть (**391**):

$$V_2 = \frac{1}{3} B_2 H \qquad V_1 = \frac{1}{3} B_1 H$$

Откуда: $$V_2 - V_1 = \frac{1}{3} H (B_2 - B_1)$$

Изъ этого равенства видно, что разность $V_2 - V_1$ стремится къ нулю, когда число боковыхъ граней вписанной и описанной пирамиды неограниченно удваивается; а такъ какъ каждая изъ разностей: $V_2 - V$ и $V - V_1$ меньше $V_2 - V_1$, то эти разности и подавно стремятся къ нулю; а это значитъ, что

$$V = пред.\ V_1 = пред.\ V_2$$

430. Теоремы. 1°. *Объемъ цилиндра равенъ произведенію площади основанія на высоту.*

2°. *Объемъ конуса равенъ произведенію площади основанія на треть высоты.*

Впишемъ въ цилиндръ прав. призму, а въ конусъ прав. пирамиду; тогда, употребляя прежнія обозначенія, будемъ имѣть:

для призмы........ $V_1 = B_1 H$

для пирамиды...... $V_1 = \frac{1}{3} B_1 H$

Эти равенства остаются вѣрными, сколько бы мы не удваивали числа боковыхъ граней призмы и пирамиды; поэтому они останутся вѣрными и тогда, когда на мѣсто перемѣнныхъ подставимъ ихъ предѣлы (**250**); слѣд.:

для цилиндра..... $V = BH$

для конуса........ $V = \frac{1}{3} BH$

431. Слѣдствіе. Если радіусъ основанія цилиндра или конуса обозначимъ черезъ R, то $B = \pi R^2$; поэтому:

Об цил. $V = \pi R^2 H$; об. кон. $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$

432. Теорема. *Объемъ усѣченнаго конуса равенъ суммѣ объемовъ трехъ конусовъ, имѣющихъ одинаковую высоту съ усѣченнымъ конусомъ, а основаніями: одинъ — нижнее основаніе этого конуса, другой—верхнее, третій—среднее пропорціанальное между ними.*

Подобно предыдущему можно доказать, что объемъ усѣченнаго конуса есть общій предѣлъ объемовъ прав. вписанныхъ и описанныхъ усѣченныхъ пирамидъ. Но объемъ V^1 прав. вписанной усѣченной пирамиды, которой высота есть H, а площади основаній B_1 и b_1, выражается равенствомъ (**393**):

$$V_1 = \frac{1}{3} H (B_1 + b_1 + \sqrt{B_1 b_1})$$

Въ предѣлѣ, при неограниченномъ удвоеніи числа боковыхъ граней вписанной пирамиды, это равенство дастъ:

$$V = \frac{1}{3} H (B + b + \sqrt{Bb})$$

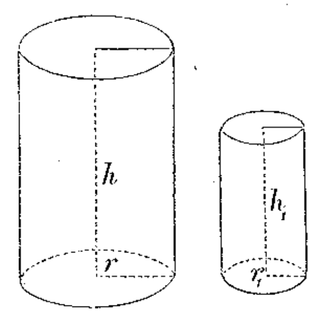
гдѣ V есть объемъ, B и b площади основаній и H высота усѣченнаго конуса.

433. Слѣдствіе. Если R и r будутъ радіусы нижняго и верхняго основаній усѣченнаго конуса, то $B = \pi R^2$, $b = \pi r^2$ и $\sqrt{Bb} = \sqrt{\pi^2 R^2 r^2} = \pi R r$; поэтому:

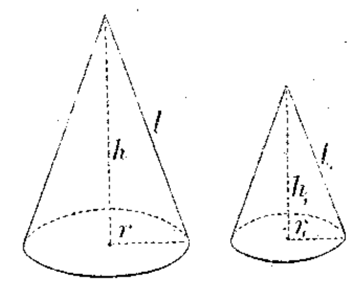
Об. ус. кон. $V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + Rr)$

Подобные цилиндры и конусы.

434. Опредѣленіе. Два цилиндра или конуса наз. *подобными*, если они произошли отъ вращенія подобныхъ прямоугольниковъ или треугольниковъ вокругъ сходственныхъ сторонъ. Обозначимъ черезъ h и h_1 высоты



Черт. 330



Черт. 331

двухъ подобныхъ цилиндровъ или конусовъ, черезъ r и r_1 ихъ радіусы и черезъ l и l_1 образующія; тогда, согласно опредѣленію, будемъ имѣть:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{h}{h_1} = \frac{l}{l_1}$$

Откуда: $\frac{r+h}{r_1+h_1} = \frac{r}{r_1}$ и $\frac{r+l}{r_1+l_1} = \frac{r}{r_1}$

435. Теорема. *Боковыя и полныя поверхности подобныхъ цилиндровъ или конусовъ относятся, какъ квадраты радіусовъ или высотъ, а объемы—какъ кубы радіусовъ или высотъ.*

Обозначимъ черезъ S, T и V соотвѣтственно боковую поверхность, полную поверхность и объемъ одного цилиндра или конуса, а черезъ S_1, T_1 и V_1 тѣ же величины для другого цилиндра или конуса, подобнаго первому. Тогда будемъ имѣть:

Для цилиндровъ:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{2\pi rh}{2\pi r_1h_1}=\frac{rh}{r_1h_1}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2}$$

$$\frac{T}{T_1}=\frac{2\pi r(r+h)}{2\pi r_1(r_1+h_1)}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{r+h}{r_1+h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2}$$

$$\frac{V}{V_1}=\frac{\pi r^2h}{\pi r_1^2h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^3}{r_1^3}=\frac{h^3}{h_1^3}$$

Для конусовъ:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{\pi rl}{\pi r_1l_1}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{l}{l_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2}$$

$$\frac{T}{T_1}=\frac{\pi r(r+l)}{\pi r_1(r_1+l_1)}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{r+l}{r_1+l_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2}$$

$$\frac{V}{V_1}=\frac{{}^1/_3\pi r^2h}{{}^1/_3\pi r_1^2h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^3}{r_1^3}=\frac{h^3}{h_1^3}$$

ГЛАВА II.

Шаръ.

Сѣченіе шара плоскостью.

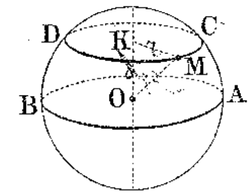
436. Опредѣленіе. Тѣло, происходящее отъ вращенія полукруга вокругъ діаметра, ограничивающаго его, наз. *шаромъ*, а поверхность, образуемая при этомъ полуокружностью, наз. *шаровою* или *сферическою* поверхностью. Эта поверхность представляетъ собою геометрическое мѣсто точекъ, одинаково удаленныхъ отъ неподвижной точки, называемой *центромъ* шара.

Прямая, соединяющая центръ съ какою-нибудь точкою поверхности, наз. *радіусомъ*, а прямая, соединяющая двѣ точки поверхности и проходящая черезъ центръ, наз. *діаметромъ* шара. Всѣ радіусы одного шара равны между собою, а діаметръ равенъ двумъ радіусамъ.

Два шара одинаковаго радіуса равны, потому что при вложеніи они совмѣщаются.

437. Теорема. *Сѣченіе шара плоскостью есть кругъ.*

1°. Предположимъ сначала, что сѣкущая плоскость AB проходитъ черезъ центръ O шара; тогда всѣ точки линіи пересѣченія, принадлежа шаровой поверхности, одинаково удалены отъ точки O, лежащей въ сѣкущей плоскости; слѣд., сѣченіе есть кругъ.



Черт. 332

2°. Положимъ теперь, что сѣкущая плоскость CD не проходитъ черезъ центръ. Опустимъ на нее изъ центра перпендикуляръ OK и возьмемъ на линіи пересѣченія какую-нибудь точку M. Соединивъ ее съ O и K, получимъ прямоугольный тр.-къ MOK, изъ котораго находимъ:

$$MK=\sqrt{OM^2-OK^2} \qquad [1]$$

Такъ какъ длины OM и OK не измѣняются при измѣненіи положенія точки M на линіи пересѣченія, то разстояніе MK есть величина постоянная; значитъ, линія пересѣченія есть окружность.

438. Слѣдствіе. Пусть R, r и d означаютъ: радіусъ шара, радіусъ круга сѣченія и разстояніе сѣкущей плоскости отъ центра; тогда равенство [1] приметъ видъ:

$$r=\sqrt{R^2-d^2}$$

Изъ этой формулы выводимъ:

1°. Наибольшее сѣченіе получается при $d=o$, т.-е. когда сѣкущая плоскость проходитъ черезъ центръ шара. Въ этомъ случаѣ $r=R$.

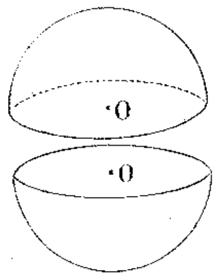
Сѣченіе шара плоскостью, проходящею черезъ центръ, наз. *большимъ кругомъ*.

2°. Сѣченія, равноотстоящія отъ центра шара, равны.

3°. Изъ двухъ сѣченій, неодинаково удаленныхъ отъ центра шара, то больше, которое ближе къ центру.

Свойства большихъ круговъ.

439. Теорема. *Большой кругъ дѣлитъ шаръ и его поверхность пополамъ.*



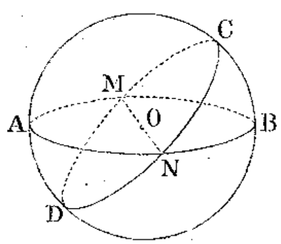
Черт. 333

Вообразимъ, что мы разрѣзали шаръ по какому-нибудь большому кругу и, перевернувъ верхнюю часть шара, вложили ее въ нижнюю такъ, чтобы у нихъ совпали круглыя основанія. Тогда всѣ точки одной части шаровой поверхности совмѣстятся съ точками другой части, потому что тѣ и другія одинаково удалены отъ общаго центра. Изъ этого слѣдуетъ, что большой кругъ дѣлитъ шаръ и его поверхность пополамъ.

440. Теорема. *Черезъ двѣ точки шаровой поверхности можно провести окружность большого круга и притомъ только одну, если эти точки не лежатъ на концахъ одного діаметра.*

Пусть на шаровой поверхности, имѣющей центръ O, взяты какія-нибудь двѣ точки A и B. Черезъ три точки A, O и B всегда можно провести плоскость и притомъ только одну, если эти точки не лежатъ на одной прямой (т.-е. на діаметрѣ). Эта плоскость, проходя черезъ центръ O, дастъ въ пересѣченіи съ шаровою поверхностью, окружность большого круга.

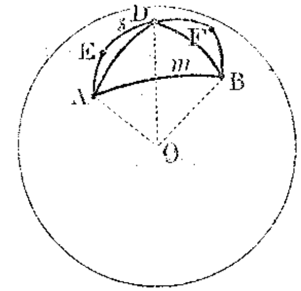
441. Теорема. *Окружности двухъ большихъ круговъ пересѣкаются пополамъ.*



Черт. 334

Дѣйствительно, плоскости двухъ большихъ круговъ AB и CD проходятъ черезъ центръ O; значитъ, онѣ пересѣкаются по прямой MN, проходящей черезъ центръ, т.-е. по общему ихъ діаметру; а діаметръ дѣлитъ окружность пополамъ.

442. Теорема. *Кратчайшее разстояніе на шаровой поверхности между двумя ея точками есть дуга большого круга, проведенная между ними.*



Черт. 335

Пусть m есть дуга большого круга, проведенная на шаровой поверхности между двумя ея точками A и B, а s *какая-нибудь* кривая, проведенная на шаровой поверхности между тѣми же точками. Докажемъ, что s длиннѣе m. Возьмемъ на кривой s произвольную точку D и соединимъ ее съ A и B дугами большого круга. Проведя радіусы OA, OD, OB, примемъ ихъ за ребра трегранного угла. Въ этомъ углѣ, какъ во всякомъ трегранномъ (**354**), сумма плоскихъ угловъ AOD и DOB больше третьяго плоскаго угла AOB. Но эти углы измѣряются дугами AD, DB и AB, проведенными изъ вершины угловъ однимъ и тѣмъ же радіусомъ; слѣд., сумма дугъ AD и DB больше дуги AB. Возьмемъ теперь на кривой s промежуточныя точки E и F и проведемъ дуги большого круга черезъ каждыя двѣ сосѣднія точки: A, E, D, F и B. Такъ же, какъ и прежде, убѣдимся, что $AE+ED>AD$ и $DF+FB>DB$; значитъ, сумма $AE+ED+DF+FB$ больше $AD+DB$, а потому и подавно больше дуги m. Вообразимъ теперь, что число промежуточныхъ точекъ, взятыхъ на кривой s, неограниченно увеличивается, и между каждыми двумя сосѣдними точками постоянно проводятся дуги большихъ круговъ; тогда линія, составленная изъ этихъ дугъ, все увеличивается и постоянно остается больше дуги m; значитъ, и *предѣлъ*,*) къ которому она стремится, долженъ быть больше m; а этотъ предѣлъ принимается за длину дуги s.

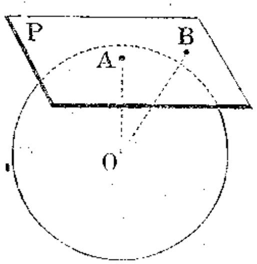
*) Мы принимаемъ здѣсь безъ доказательства, что предѣлъ кривой $AEDFB$, составленной изъ дугъ большихъ круговъ, существуетъ и что онъ не зависитъ отъ закона, по которому увеличивается число точекъ на кривой s.

Плоскость, касательная къ шару.

443. Опредѣленіе. Плоскость, имѣющая съ шаровою поверхностью только одну общую точку, наз. *касательною* плоскостью.

Возможность существованія такой плоскости доказывается слѣдующей теоремой.

Теорема. *Плоскость (P черт. 336), перпендикулярная къ радіусу (OA) въ концѣ его, лежащемъ на поверхности шара, есть касательная.*



Черт. 336

Возьмемъ на плоскости P произвольную точку B и соединимъ ее съ центромъ O. Такъ какъ OB наклонная, а OA перпендикуляръ къ P, то $OB > OA$. Поэтому точка B не можетъ лежать на шаровой поверхности; слѣд., у плоскости P есть только одна общая точка A съ шаровою поверхностью; значитъ, эта плоскость касательная.

444. Обратная теорема. *Касательная плоскость (P, черт. 336) перпендикулярна къ радіусу (OA), проведенному въ точку касанія.*

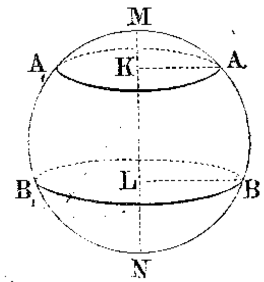
Такъ какъ, по опредѣленію, точка A есть единственная общая у плоскости съ шаровою поверхностью, то всякая другая точка плоскости лежитъ внѣ шаровой поверхности и, слѣд., дальше отстоитъ отъ центра, чѣмъ A; такимъ образомъ, прямая OA есть кратчайшее разстояніе точки O отъ плоскости P, т.-е. OA есть перпендикуляръ къ P.

Поверхность шара и его частей.

445. Опредѣленія. Часть шаровой поверхности, заключенная между двумя параллельными сѣкущими плоскостями AA_1

и BB_1, наз. *шаровымъ поясомъ* или *зоною*. Окружности сѣченій AA_1 и BB_1 наз. *основаніями*, а разстояніе KL между параллельными плоскостями — *высотою* пояса.

Часть шаровой поверхности, отсѣкаемая какою-нибудь плоскостью AA_1, наз. *сегментною поверхностью;* окружность AA_1 есть *основаніе*, а отрѣзокъ KM радіуса, перпендикулярнаго къ плоскости сѣченія, есть *высота* сегментной поверхности. Сегментную поверхность можно разсматривать, какъ частный случай пояса, а именно: если одна изъ параллельныхъ плоскостей сдѣлается *касательною* къ шару, тогда поясъ обращается въ сегментную поверхность.



Черт. 337

Шаровой поясъ и сегментную поверхность можно разсматривать, какъ *поверхности вращенія:* въ то время, какъ полуокружность $MABN$, вращаясь вокругъ діаметра MN, описываетъ шаровую поверхность, часть ея AB опишетъ поясъ, а часть MA—сегментную поверхность.

446. Лемма. *Боковая поверхность каждаго изъ трехъ тѣлъ: конуса, усѣченнаго конуса и цилиндра равна произведенію высоты тѣла на длину окружности, у которой радіусъ есть перпендикуляръ, возстановленный изъ средины образующей до пересѣченія съ осью.*

1°. Пусть конусъ образуется вращеніемъ тр.-ка ABC вокругъ катета AC. Если D есть средина образующей AB, то (**422**):

Боков. пов. конуса $= 2\pi BC.AD$ [1]

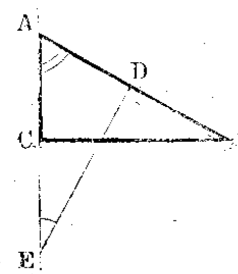
Проведя $DE \perp AB$, получимъ два подобныхъ тр.-ка ABC и ADE (они прямоугольные и имѣютъ общій уголъ A); изъ ихъ подобія выводимъ:

$$BC : ED = AC : AD;$$

откуда: $BC . AD = ED . AC$

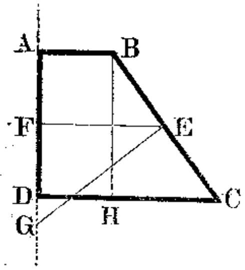
Теперь равенство [1] можно написать такъ:

Боков. пов. конуса $= 2\pi ED . AC$. Что и треб. доказ.



Черт. 338

2°. Пусть усѣченный конусъ производится вращеніемъ трапеціи $ABCD$ вокругъ стороны AD. Проведя среднюю линію EF, будемъ имѣть (**425**, 2°):



Черт. 339

Боков. пов. ус. конуса $=2\pi EF\,.\,BC$ [2]

Приведемъ $EG \perp BC$ и $BH \parallel AD$; тогда получимъ два подобныхъ тр.-ка EFG и BCH (стороны одного перпендикулярны къ сторонамъ другого); изъ ихъ подобія выводимъ:

$$EF : BH = EG : BC$$

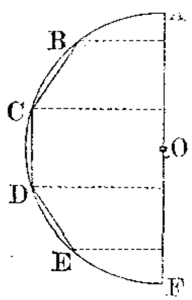
Откуда: $$EF.BC = BH.EG = AD.EG$$

Теперь равенство [2] можно написать такъ:

Бок. пов. ус. кон. $=2\pi EG.AD.$ Что и треб. доказ.

3°. Теорема остается вѣрной и въ примѣненіи къ цилиндру, такъ какъ окружность, о которой говорится въ теоремѣ, равна окружности основанія цилиндра.

447. Опредѣленіе. За величину поверхности, образуемой вращеніемъ какой-нибудь части BE полуокружности ACF вокругъ діаметра AF, принимаютъ *предѣлъ*, къ которому стремится поверхность, образуемая вращеніемъ вокругъ того же діаметра правильной вписанной ломаной линіи $BCDE$, когда число ея сторонъ неограниченно удваивается.



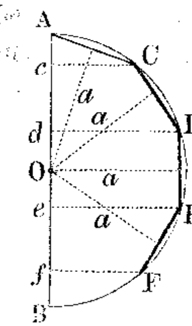
Черт. 340

Это опредѣленіе распространяется и на шаровую поверхность; въ этомъ случаѣ правильная ломаная линія вписывается въ полукружность.

448. Теорема. *Поверхность шарового пояса (и сегментная поверхность) равна произведенію окружности большого круга на высоту.*

Пусть въ дугу AF, производящую поверхность пояса, вписана правильная ломаная линія $ACDEF$ съ произвольнымъ числомъ сторонъ.

Поверхность, образуемая вращеніемъ этой ломаной, состоитъ изъ частей, образуемыхъ сторонами AC, CD, DE.... Эти отдѣльныя поверхности представляютъ собою боковыя поверхности или конуса (отъ вращенія AC), или усѣченнаго конуса (отъ вращенія CD, EF...), или цилиндра (отъ вращенія DE, если $DE \parallel AB$). Поэтому мы можемъ примѣнить къ нимъ лемму предыдущаго §. При этомъ замѣтимъ, что перпендикуляры, возстановленные изъ срединъ образующихъ до пересѣченія съ осью, равны апоѳемѣ правильной вписанной ломаной. Обозначивъ ее черезъ a, получимъ:



Черт. 341

поверхн. $AC = 2\pi a\,.\,Ac$

поверхн. $CD = 2\pi a\,.\,cd$

поверхн. $DE = 2\pi a\,.\,de$

. . . .

Сложивъ эти равенства почленно, найдемъ:

поверхн. $ACDEF = 2\pi a.\ Af$

При неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ вписанной ломаной апоѳема a стремится къ предѣлу, равному радіусу шара R, а прямая Af остается безъ измѣненія; слѣд.:

пред. поверхн. $ACDEF = 2\pi R.\ Af$

Но *предѣлъ* поверхности $ACDEF$ есть то, что принимаютъ за величину поверхности шарового пояса (или сегментной поверхности), а прямая Af есть высота пояса; поэтому:

поверхн. пояса $=2\pi RH$

Замѣчаніе. Доказательство нисколько не измѣнится, если предположимъ, что ломаная линія вписана не въ дугу AF, образующую частный случай пояса (сегментную поверхность), а въ какую угодно дугу, напр. въ CF.

449. Теорема. *Поверхность шара равна произведенію окружности большого круга на діаметръ.*

Или: *поверхность шара равна учетверенной площади большого круга.*

Поверхность шара, производимую вращеніемъ полуокружности ADB (черт. 341), можно разсматривать, какъ сумму поверхностей, образуемыхъ вращеніемъ дугъ AD и DB. Поэтому, согласно предыдущей теоремѣ, можемъ писать:

$$\text{пов. шара} = 2\pi R.Ad + 2\pi R.dB = 2\pi R(Ad + dB) = 2\pi R.2R = 4\pi R^2$$

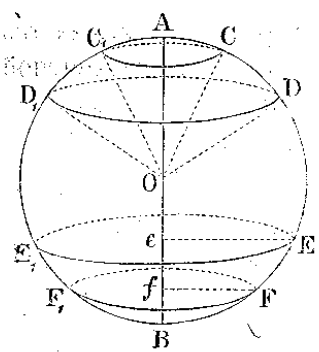
450. Слѣдствіе. *Поверхности шаровъ относятся, какъ квадраты радіусовъ или діаметровъ,* потому что, обозначая черезъ R и R_1 радіусы, а черезъ S и S_1 поверхности двухъ шаровъ, будемъ имѣть:

$$S : S_1 = 4\pi R^2 : 4\pi R_1^2 = R^2 : R_1^2 = (2R)^2 : (2R_1)^2$$

451. Замѣчаніе. Если бы, вмѣсто того, чтобы въ дугу AF (черт. 341) вписывать правильную ломаную линію, мы *описали* около нея правильную ломаную, то совершенно такъ же доказали бы, что предѣлъ поверхности, образуемой этой ломаной, равенъ $2\pi RH$. Такимъ образомъ, поверхность шарового пояса (сегментной поверхности и цѣлаго шара) можно разсматривать, какъ *общій предѣлъ* поверхностей, образуемыхъ вращеніемъ правильныхъ ломаныхъ линій, какъ вписанныхъ, такъ и описанныхъ.

Объемъ шара и его частей.

452. Опредѣленія. Тѣло, получаемое отъ вращенія кругового сектора COD вокругъ діаметра AB, не пересѣкающаго его поверхности, наз. *шаровымъ секторомъ*; это тѣло ограничено боковыми поверхностями двухъ конусовъ и поверхностью шарового пояса; послѣдняя поверхность наз. *основаніемъ* шарового сектора. Въ частномъ случаѣ одинъ изъ радіусовъ кругового сектора можетъ совпадать съ осью вращенія; напр., секторъ AOC, вращаясь вокругъ AO, производитъ шаровой секторъ $OCAC_1$, ограниченный боковою поверхностью конуса и сегментною поверхностью.



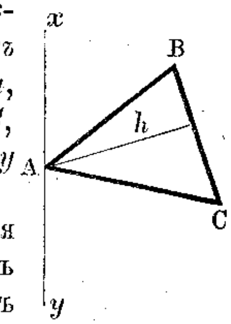
Черт. 343

Часть шара, заключенная между параллельными плоскостями EE_1 и FF_1, наз. *шаровымъ слоемъ*. Круги параллельныхъ сѣченій суть *основанія* слоя, а разстояніе ef между ними—его *высота*.

Часть шара FF_1B, отсѣкаемая какою-нибудь плоскостью FF_1, наз. *шаровымъ сегментомъ*. Кругъ сѣченія есть *основаніе* сегмента, а отрѣзокъ Bf радіуса, перпендикулярнаго къ основанію, есть *высота* сегмента. Шаровой сегментъ представляетъ частный случай шарового слоя, а именно: если одна изъ параллельныхъ плоскостей сдѣлается *касательною* къ шару, то слой обратится въ шаровой сегментъ.

Шаровой слой и сегментъ можно разсматривать, какъ тѣла вращенія: когда полукругъ ADB (черт. 343) производитъ своимъ вращеніемъ шаръ, часть его $EefF$ производитъ слой, а часть fFB—шаровой сегментъ.

453. Лемма. *Если тр.-къ ABC вращается вокругъ оси xy, которая лежитъ въ плоскости тр.-ка, проходитъ чрезъ его вершину A, но не пересѣкаетъ его поверхности, то объемъ тѣла, получаемаго при этомъ вращеніи, равенъ произведенію поверхности, образуемой противоположною стороною BC, на одну треть высоты h, опущенной на эту сторону.*

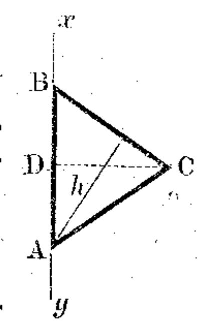


Черт. 344

При доказательствѣ разсмотримъ три случая

1°. *Ось совпадаетъ стороною AB.* Въ этомъ случаѣ искомый объемъ равенъ суммѣ объемовъ двухъ конусовъ, получаемыхъ вращеніемъ прямоугольныхъ тр.-ковъ BCD и DCA. Первый объемъ равенъ $\frac{1}{3}\pi CD^2.DB$, а второй—$\frac{1}{3}\pi CD^2.DA$; поэтому:

$$\text{Об. } ABC = \frac{1}{3}\pi CD^2(DB + DA) = \frac{1}{3}\pi DC.DC.BA$$



Черт. 345

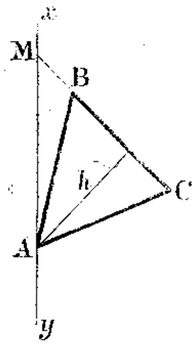
Произведеніе $DC.BA$ равно $BC.h$, такъ какъ каждое изъ этихъ произведеній выражаетъ двойную площадь тр.-ка ABC; поэтому:

$$\text{Об. } ABC = \frac{1}{3}\pi DC.BC.h$$

Но произведеніе $\pi DC.BC$ равно боковой поверхности конуса BDC; значитъ

$$\text{Об. } ABC = (\text{пов. } BC).\frac{1}{3}h$$

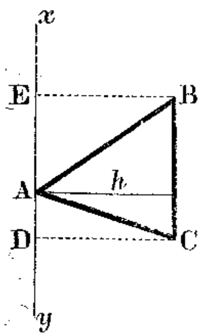
2°. *Ось не совпадаетъ съ AB и не параллельна BC.* Въ этомъ случаѣ искомый объемъ равенъ разности объемовъ, производимыхъ вращеніемъ тр.-ковъ AMC и AMB. По доказанному въ первомъ случаѣ объемъ $AMC = {}^1/_3 h$ (пов. MC), а объемъ $AMB = {}^1/_3 h$ (пов. MB); слѣд.:



Черт. 346

$$\text{Об. } ABC = \frac{1}{3} h\,(\text{пов. } MC - \text{пов. } MB) = \frac{1}{3} h\,(\text{пов. } BC)$$

3°. *Ось параллельна сторонѣ BC.* (черт. 347). Тогда искомый объемъ равенъ объему $DEBC$ безъ объема AEB и безъ объема ACD; первый изъ нихъ равенъ $\pi DC^2 . ED$, второй — ${}^1/_3 \pi EB^2 . EA$ и третій — ${}^1/_3 \pi DC^2 . AD$. Принявъ теперь во вниманіе, что $EB = DC$, получимъ:



Черт. 347

$$\text{Объемъ } ABC = \pi DC^2 (ED - \frac{1}{3} EA) = \frac{1}{3} AD)$$

$$= \pi DC^2 (ED - \frac{1}{3} ED) = \pi DC^2 . \frac{2}{3} ED$$

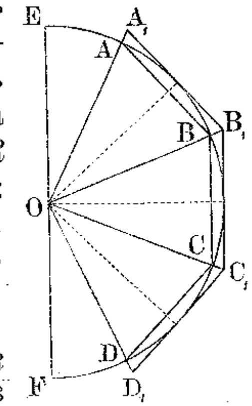
Произведеніе $2\pi DC . ED$ выражаетъ боковую поверхность цилиндра, производимую стороною BC; поэтому:

$$\text{Об. } ABC = (\text{пов. } BC) . \frac{1}{3} DC = (\text{пов. } BC) . \frac{1}{3} h$$

454. Теорема. *Объемъ шарового сектора равенъ произведенію поверхности его основанія на треть радіуса.*

Пусть шаровой секторъ производится вращеніемъ вокругъ діаметра EF (черт. 348) сектора AOD. Поведемъ разсужденіе въ слѣдующей послѣдовательности.

1°. Впишемъ въ дугу AD правильную ломаную линію $ABCD$ съ произвольнымъ числомъ сторонъ и затѣмъ опишемъ около нея соотвѣтствующую ломаную $A_1B_1C_1D_1$. Многоугольные секторы $OABCD$ и $OA_1B_1C_1D_1$ произведутъ при вращеніи нѣкоторыя тѣла, объемы которыхъ обозначимъ: перваго черезъ V_1, а второго черезъ V_2. Объемъ V_1 есть сумма объемовъ, получаемыхъ вращеніемъ тр.-ковъ OAB, OBC, OBD вокругъ оси EF; объемъ V_2 есть сумма объемовъ, получаемыхъ вращеніемъ вокругъ той же оси тр.-ковъ OA_1B_1, OB_1C_1, OC_1D_1. Примѣнимъ къ этимъ объемамъ лемму предыдущаго §, причемъ замѣтимъ, что высоты первыхъ тр.-ковъ равны апоѳемѣ a вписанной ломаной, а высоты вторыхъ тр.-ковъ равны радіусу R шара. Согласно этой леммѣ будемъ имѣть:



Черт. 348

$$V_1 = (\text{пов. } AB)\frac{a}{3} + \text{пов.}(BC)\frac{a}{3} + (\text{пов. } CD)\frac{a}{3} = (\text{пов. } ABCD)\frac{a}{3}$$

$$V_2 = (\text{пов. } A_1B_1)\frac{R}{3} + (\text{пов. } B_1C_1)\frac{R}{3} + (\text{пов. } C_1D_1)\frac{R}{3} = (\text{пов. } A_1B_1C_1D_1)\frac{R}{3}$$

2°. Вообразимъ теперь, что число сторонъ обѣихъ ломаныхъ линій неограниченно удваивается. Тогда поверхности $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ будутъ стремиться къ общему предѣлу, именно къ поверхности шарового пояса AD, а апоѳема a будетъ имѣть предѣломъ радіусъ R; слѣд.:

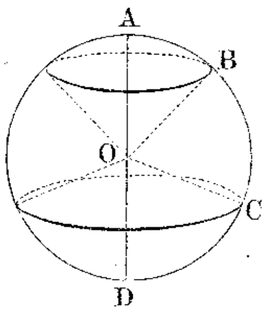
$$\textit{пред. } V_1 = \textit{пред. } V_2 = (\text{пов. } AD)\frac{R}{3}$$

3°. Теперь докажемъ, что общій предѣлъ объемовъ V_1 и V_2 есть объемъ V шарового сектора OAB.— Очевидно, что $V > V_1$ и $V_2 > V$; значитъ, каждая изъ разностей $V - V_1$ и $V_2 - V$ меньше разности $V_2 - V_1$. Такъ какъ, по доказанному, объемы V_2 и V_1 стремятся къ *общему* предѣлу, то разность $V_2 - V_1$ стремится къ нулю; слѣд., разности $V - V_1$ и $V_2 - V$ и подавно стремятся къ нулю; а это значитъ, что $V = \textit{пред. } V_1 = \textit{пред. } V_2$. Но было доказано, что $\textit{пред. } V_1 = (\text{пов. } AD)\frac{R}{3}$; значитъ:

$$V = (\text{пов. } AD) . \frac{R}{3}$$

Замѣчаніе. Теорема и ея доказательство не зависятъ отъ того, будетъ ли одинъ изъ радіусовъ кругового сектора совпадать съ осью вращенія, или нѣтъ.

455. Теорема. *Объемъ шара равняется произведенію его поверхности на треть радіуса.*



Черт. 349

Разбивъ полукругъ $ABCD$, производящій шаръ, на какіе-нибудь секторы AOB, BOC, COD, мы замѣтимъ, что объемъ шара можно разсматривать, какъ сумму объемовъ этихъ секторовъ. Такъ какъ, согласно предыдущей теоремѣ:

$$\text{Объемъ } AOB = (\text{пов. } AB)\ {}^1/_3\, R$$
$$\text{Объемъ } BOC = (\text{пов. } BC)\ {}^1/_3\, R$$
$$\text{Объемъ } COD = (\text{пов. } CD)\ {}^1/_3\, R$$

то объемъ шара $= (\text{пов. } AB + \text{пов. } BC + \text{пов. } CD)\ {}^1/_3 R =$
$= (\text{пов. } ABCD)\ {}^1/_3\, R$

456. Слѣдствіе. Обозначимъ высоту шарового пояса или сегмента черезъ H, а радіусъ шара черезъ R; тогда поверхность пояса или сегмента выразится, какъ мы видили (**448**) формулой $2\pi RH$, а поверхность шара (**449**) формулой $4\pi R^2$; поэтому:

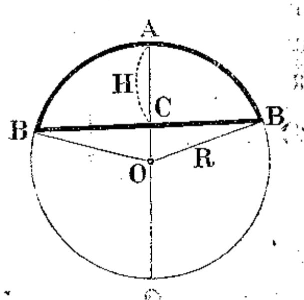
$$\text{Об. шар. сектора} = 2\pi RH.\ {}^1/_3 R = {}^2/_3 \pi R^2 H$$
$$\text{Об. шара} = 4\pi R^2.\ {}^1/_3 R = {}^4/_3 \pi R^3$$

Отсюда видно, что *объемы шаровъ относятся, какъ кубы радіусовъ или діаметровъ.*

457. Теорема. *Объемъ шарового сегмента равенъ объему цилиндра, у котораго радіусъ основанія есть высота сегмента, а высота равна радіусу шара, уменьшенному на треть высоты сегмента,*

т. е. $V = \pi H^2(R - {}^1/_3 H)$

гдѣ H есть высота сегмента, а R радіусъ шара.



Черт. 350

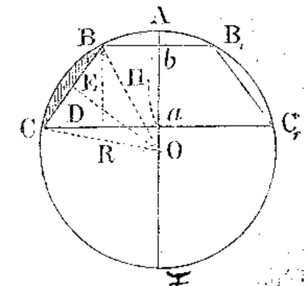
Объемъ сегмента ABB_1 найдется, если изъ объема шарового сектора $OBAB_1$ вычтемъ объемъ конуса OBB_1. Первый изъ нихъ равенъ ${}^2/_3\pi R^2H$, а второй ${}^1/_3\pi CB^2.CO$. Такъ какъ BC есть средняя пропорціанальная между AC и CD то $CB^2 = H(2R - H)$; поэтому $CB^2.CO = H(2R - H)(R - H) = 2R^2H\ \ RH^2 - 2RH^2 + H^3 = 2R^2H - 3RH^2 + H^3$; слѣд.:

$$\text{об. } ABB_1 = \text{об. } OBAB_1 - \text{об. } OBB_1 = \frac{2}{3}\pi R^2H - \frac{1}{3}\pi CB^2.CO = \frac{2}{3}\pi R^2H - \frac{2}{3}\pi R^2H + \pi RH^2 - \frac{1}{3}\pi H^3 = \pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right)$$

458. Теорема. *Объемъ шарового слоя равенъ объему шара, имѣющаго діаметромъ высоту слоя, сложенному съ полусуммою объемовъ двухъ цилиндровъ, у которыхъ высота равна высотѣ слоя, а основанія: у одного нижнее, у другое верхнее основаніе слоя,*

т. е. $V = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2)H$

гдѣ H есть высота слоя, а r_1 и r_2 радіусы основаній слоя.



Черт. 351

Предварительно найдемъ объемъ, получаемый вращеніемъ вокругъ діаметра AF кругового сегмента BC (покрытаго на чертежѣ штрихами). Этотъ объемъ есть разность между объемомъ шарового сектора OBC и объемомъ тѣла, получаемаго вращеніемъ тр.-ка OBC. Первый равенъ ${}^2/_3\pi R^2H$, а второй будетъ

$$(\text{пов. } BC)\,\frac{1}{3}OE = (2\pi OE.H)\frac{1}{3}\,OE = \frac{2}{3}\pi OE^2.H$$

Слѣд., объемъ отъ вращенія сегмента выразится такъ:

$$\frac{2}{3}\pi H(R^2 - OE^2) = \frac{2}{3}\pi H.CE^2 = \frac{2}{3}\pi H.\frac{1}{4}BC^2 = \frac{1}{6}\pi BC^2.H$$

Чтобы получить объемъ слоя, достаточно къ найденному объему приложить объемъ усѣченнаго конуса BB_1C_1C; поэтому объемъ слоя будетъ:

$$\frac{1}{6}\pi BC^2H + \frac{1}{3}\pi(Ca^2 + Bb^2 + Ca.Bb)H = \frac{1}{6}\pi H(BC^2 + 2Ca^2 + 2Bb^2 + 2Ca.Bb)$$

Проведя $BD \perp Ca$, будемъ имѣть:

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 = H^2 + (Ca - Bb)^2 = H^2 + Ca^2 + Bb^2\ \ 2Ca.Bb$$

Подставивъ это выраженіе въ предыдущую формулу, найдемъ:

$$\text{об. слоя} = \frac{1}{6}\pi H(H^2 + 3\,Ca^2 + 3Bb^2) = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi(Ca^2 + Bb^2)H$$

или, обозначая Ca черезъ r_1, а Bb черезъ r_2:

$$\text{об. слоя} = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2)H$$

Положивъ въ этой формулѣ $r_2 = 0$, получимъ новое выраженіе для объема шарового сегмента:

$$\text{об. сегм.} = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi r_1^2 H$$

ЗАДАЧИ.

353. Объемъ цилиндра, у котораго высота вдвое болѣе діаметра, равенъ 1 куб. метру. Вычислить его высоту.

354. Діаметръ основанія цилиндра =16 сант., а полная поверхность его содержитъ 1546 квадр. сант.; вычислить высоту этого цилиндра.

355. Найти вѣсъ желѣзной цилиндрической трубки, которой внутренній діаметръ =17 сант., внѣшній діаметръ =18 сант., а длина 74 сант.; удѣльный вѣсъ желѣза 7,7.

356. Въ сосудъ, имѣющій форму конуса, обращеннаго вершиною внизъ, вливаютъ 345 граммовъ ртути. Зная, что уголъ при вершинѣ конуса равенъ 60^0, а уд. вѣсъ ртути 13,596, вычислить высоту, до которой налита въ сосудѣ ртуть.

357. Вычислить боковую поверхность и объемъ усѣченнаго конуса, у котораго радіусы основаній суть 27 и 18 сант., а образующая 21 сант.

358. На какомъ разстояніи отъ центра шара, котораго радіусъ равенъ 2,425 метра, слѣдуетъ провести сѣкущую плоскость, чтобы отношеніе поверхности меньшаго сегмента къ боковой поверхности конуса, имѣющаго общее съ сегментомъ основаніе, а вершину въ центрѣ шара, равнялось 1:4.

359. Найти объемъ тѣла, происходящаго отъ вращенія прав. 6-угольника со стороною a вокругъ одной изъ своихъ сторонъ.

360. Вычислить радіусъ шара, описаннаго около куба, котораго ребро равно 1 метру.

361. Желѣзный пустой шаръ, котораго внѣшній радіусъ =0,154 метра, плаваетъ въ водѣ, погружаясь въ нее на половину. Вычислить толщину этого шара, зная, что уд. вѣсъ желѣза равенъ 7,7.

362. Вычислить объемъ тѣла, происходящаго отъ вращенія прав. треугольника со стороною a вокругъ оси, проходящей черезъ его вершину и параллельной противоположной сторонѣ.

363. Данъ равносторонній $\triangle ABC$ со стороною a; на BC строятъ квадратъ $BCDE$, располагая его въ *противоположную сторону отъ треугольника*. Вычислить объемъ тѣла, происходящаго отъ вращенія 5-угольника $ABEDC$ вокругъ стороны AB.

364. Данъ квадратъ $ABCD$ со стороною a. Черезъ вершину A проводятъ прямую AR, перпендикулярную къ діагонали AC, и вращаютъ квадратъ вокругъ AR. Вычислить поверхность, образуемую периметромъ квадрата, и объемъ, образуемый площадью квадрата.

365. Данъ прав. 6-угольникъ $ABCDEF$ со стороною a. Черезъ вершину A проводятъ прямую AR, перпендикулярную къ радіусу OA, и вращаютъ 6-угольникъ вокругъ AR. Вычислить поверхность, образуемую периметромъ, и объемъ, образуемый площадью прав. 6-угольника.

366. Въ шарѣ, котораго радіусъ равенъ 2, просверлено цилиндрическое отверстіе вдоль его діаметра. Вычислить объемъ оставшейся части, если радіусъ цилиндр. отверстія равенъ 1.

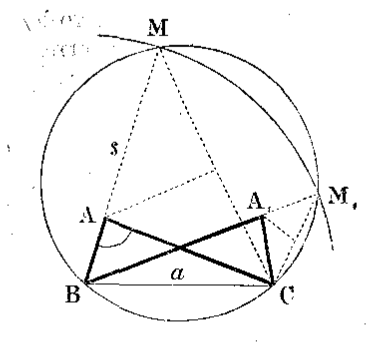
ПРИЛОЖЕНІЕ

Главнѣйшіе методы рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе.

1. Методъ геометрическихъ мѣстъ, извѣстный еще со временъ Платона (IV вѣка до Р. Хр.), состоитъ *въ слѣдующемъ*. Положимъ, что рѣшеніе предложенной задачи сводится къ нахожденію нѣкоторой *точки*, которая должна удовлетворять извѣстнымъ условіямъ. Отбросимъ изъ этихъ условій какое-нибудь одно; тогда задача сдѣлается *неопредѣленною*, т. е. ей могутъ удовлетворять безчисленное множество точекъ. Эти точки составятъ нѣкоторое геометрическое мѣсто. Построимъ его, если это окажется возможнымъ. Затѣмъ примемъ во вниманіе отброшенное нами условіе и откинемъ какое-нибудь другое; тогда задача будетъ снова удовлетворяться безчисленнымъ множествомъ точекъ, которыя составятъ новое геометрическое мѣсто. Построимъ его, если это возможно. Искомая точка, удовлетворяя всѣмъ условіямъ, должна лежать на обоихъ геометрическихъ мѣстахъ, т. е. она должна находиться въ ихъ пересѣченіи. Задача окажется возможной или невозможной, смотря по тому, пересѣкаются или нѣтъ найденныя геометр. мѣста; и задача будетъ имѣть столько рѣшеній, сколько окажется точекъ пересѣченія.

Приведемъ на этотъ методъ одинъ примѣръ, который вмѣстѣ съ тѣмъ покажетъ намъ, какъ иногда приходится вводить въ чертежъ вспомогательныя линіи съ цѣлью принять во вниманіе всѣ данныя условія задачи.

Задача. *Построить треугольникъ по основанію* a, *углу при вершинѣ* A *и суммѣ* s *боковыхъ сторонъ.*



Черт. 352

Пусть ABC будетъ искомый $\triangle$. Чтобы принять во вниманіе данную сумму боковыхъ сторонъ, продолжимъ BA и отложимъ $BM=s$. Проведя MC, получимъ вспомогательный тр.-къ BMC. Если мы построимъ этотъ тр.-къ, то затѣмъ легко построить и тр.-къ ABC. Построеніе тр.-ка BMC сводится къ нахожденію точки M. Замѣтивъ, что тр.-къ AMC равнобедренный ($AM=AC$) и слѣд., $\angle M=\frac{1}{2}A$ ($\angle M+\angle C=\angle A$), мы видимъ, что точка M должна удовлетворять двумъ условіямъ: 1) она удалена отъ B на разстояніе s, во 2) изъ нея данная конечная прямая BC видна подъ угломъ, равнымъ $\frac{1}{2}A$. Отбросивъ второе условіе, мы получимъ безчисленное множество точекъ M, лежащихъ на окружности, описанной изъ B радіусомъ, равнымъ s. Отбросивъ первое условіе, мы получимъ также безчисленное множество точекъ M, лежащихъ на дугѣ сегмента, построеннаго на BC и вмѣщающаго уголъ, равный $^1/_2A$. Такимъ образомъ нахожденіе точки M сводится къ построенію двухъ геометрическихъ мѣстъ, изъ которыхъ каждое мы построить умѣемъ. Задача окажется невозможною, если эти геометрическія мѣста не будутъ имѣть общихъ точекъ; задача будетъ имѣть одно или два рѣшенія, смотря по тому, касаются ли, или же пересѣкаются эти мѣста (на нашемъ чертежѣ дуга сегмента пересѣкается съ окружностью; вслѣдствіе этого получаются два тр.-ка ABC и A_1BC, удовлетворяющіе условіямъ задачи).

Иногда задача сводится не къ опредѣленію точки, а къ нахожденію *прямой*, удовлетворяющей нѣсколькимъ условіямъ Если отбросимъ одно изъ нихъ, то получимъ безчисленное множество прямыхъ; при этомъ можетъ случиться, что эти прямыя опредѣляютъ нѣкоторую линію (напр., всѣ будутъ касательными къ нѣкоторой окружности). Отбросивъ другое условіе и принявъ во вниманіе то, которое было откинуто ранѣе, мы получимъ снова безчисленное множество прямыхъ, которыя, быть можетъ, опредѣлятъ нѣкоторую другую линію. Построивъ, если возможно, эти двѣ линіи, мы затѣмъ легко найдемъ и искомую прямую. Пусть, напр., намъ предложена задача: *провести сѣкущую къ двумъ даннымъ окружностямъ O и O_1 такъ, чтобы части сѣкущей, заключенныя внутри окружностей, равнялись соотвѣтственно даннымъ длинамъ* **a** и **a₁**. Если возьмемъ только одно условіе, напр., чтобы часть сѣкущей, лежащая внутри круга O, равнялась a, то получимъ безчисленное множество сѣкущихъ, которыя всѣ должны быть одинаково удалены отъ центра этого круга (такъ какъ равныя хорды одинаково удалены отъ центра). Поэтому, если въ кругѣ O гдѣ-нибудь построимъ хорду, равную a, и затѣмъ радіусомъ, равнымъ разстоянію этой хорды отъ центра, опишемъ окружность, концентрическую съ O, то всѣ сѣкущія, о которыхъ идетъ рѣчь, должны касаться этой вспомогательной окружности. Подобнымъ образомъ, принявъ во вниманіе только второе условіе, мы увидимъ, что искомая сѣкущая должна касаться второй вспомогательной окружности, концентрической съ O_1. Значитъ, вопросъ приводится къ построенію общей касательной къ двумъ окружностямъ.

Кромѣ тѣхъ геометрическихъ мѣстъ, которыя указаны въ текстѣ этой книги (§§ 63, 98, 162, 200), полезно замѣтить еще слѣдующія (доказательство предоставляемъ самимъ учащимся):

1⁰. Геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ въ данномъ отношеніи отрѣзки параллельныхъ прямыхъ, заключенные между сторонами даннаго угла, есть прямая, проходящая черезъ вершину угла и какую нибудь одну изъ этихъ точекъ.

2⁰. Геометрическое мѣсто точекъ, которыхъ разстоянія отъ сторонъ даннаго угла находятся въ данномъ отношеніи, состоитъ изъ двухъ прямыхъ, проходящихъ черезъ вершину угла, и изъ которыхъ одна лежитъ внутри угла, а другая внѣ его.

3⁰. Геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ въ данномъ отношеніи всѣ равныя хорды данной окружности, есть окружность, концентрическая съ данною.

4⁰. Геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ касательныя, проведенныя къ данной окружности, имѣютъ данную длину, есть окружность, концентрическая съ данною.

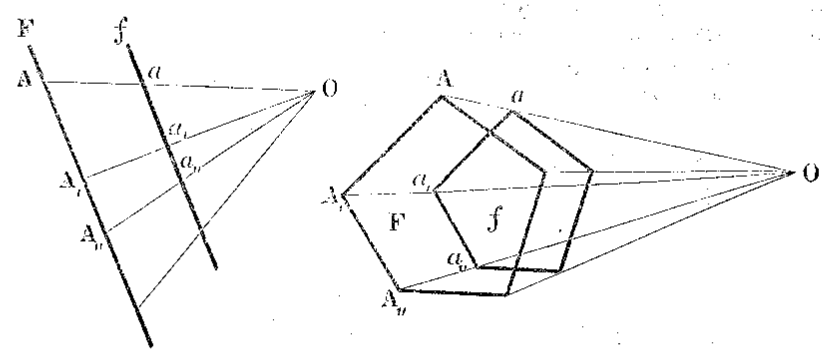
5⁰. Геометрическое мѣсто точекъ, квадраты разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ A и B имѣютъ постоянную сумму, есть окружность, которой центръ лежитъ въ срединѣ прямой AB (доказательство основывается на теоремѣ § 212).

6⁰. Геометрическое мѣсто точекъ, квадраты разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ A и B имѣютъ постоянную разность, есть прямая, перпендикулярная къ прямой AB.

7⁰. Геометрическое мѣсто точекъ, сумма разстояній которыхъ отъ сторонъ даннаго угла постоянна, есть лежащій внутри угла отрѣзокъ прямой, отсѣкающей отъ угла равнобедренный тр.-къ. Продолженія этого отрѣзка (въ обѣ стороны) представляютъ геометр. мѣсто точекъ, разность разстояній которыхъ отъ сторонъ угла постоянна.

8⁰. Геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ въ данномъ отношеніи хорды, проведенныя изъ одной точки A данной окружности, есть окружность, касательная къ данной въ точкѣ A.

Послѣднее геометрическое мѣсто составляетъ частный случай слѣдующаго болѣе общаго:



Черт. 353

9⁰. Если изъ данной точки O (черт. 353) къ различнымъ точкамъ A, A_1, A_{11}... какой-нибудь фигуры F проведемъ прямыя OA, OA_1, OA_{11}.... и на каждой изъ нихъ отложимъ части Oa, Oa_1, Oa_{11},... такія, что

$$Oa:OA=Oa_1:OA_1=Oa_{11}:OA_{11}=.....$$

то геометрическое мѣсто точекъ a, a_1, a_{11}... есть фигура f, подобная фигурѣ F и одинаково съ ней расположенная относительно точки O.

Такимъ образомъ, если фигура F есть прямая, то и f есть прямая (параллельная F); если F есть многоугольникъ, то и f есть многоугольникъ, подобный F и одинаково съ нимъ расположенный; если F есть окружность то и f есть окружность.

Когда пропорціональныя части Oa, Oa_1, Oa_{11}... откладываются на продолженіяхъ линій OA, OA_1... (за точку O), то получается тоже подобная фигура, но расположенная *обратно* относительно точки O.

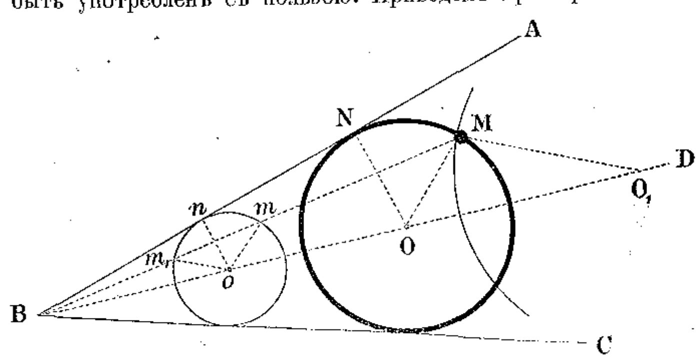
Замѣтимъ, что точка O въ этихъ случаяхъ наз. *центромъ подобія* фигуръ F и f, точки A и a, A_1 и a_1 и т. д наз. *сходственными* точками, а прямыя OA, OA_1...—*лучами подобія.*

2. Методъ подобія. Онъ состоитъ въ томъ, что, пользуясь нѣкоторыми данными задачи, строятъ сначала фигуру, *подобную* искомой, а затѣмъ переходятъ къ послѣдней. Этотъ методъ особенно удобенъ тогда, когда только одна данная величина есть длина, а всѣ прочія суть или углы, или отношенія линій; таковы, напр., задачи:

Построить треугольникъ по данному углу, сторонѣ и отношенію двухъ другихъ сторонъ, или по двумъ угламъ и длинѣ нѣкоторой прямой (высотѣ, медіанѣ, биссектриссѣ и т. д.);

Построить квадратъ по данной суммѣ или разности между діагональю и стороною; и т. п.

Въ этихъ задачахъ положеніе искомой фигуры остается произвольнымъ; но во многихъ вопросахъ требуется построить фигуру, которой положеніе относительно данныхъ точекъ или линій вполнѣ опредѣлено. При этомъ можетъ случиться, что, отрѣшившись отъ какого-нибудь одного изъ условій положенія и оставивъ всѣ остальныя, мы получимъ безчисленное множество фигуръ, *подобныхъ* искомой. Въ такомъ случаѣ методъ подобія можетъ быть употребленъ съ пользою. Приведемъ примѣръ.



Черт. 354

Задача. *Въ данный уголъ ABC вписать окружность, которая проходила бы черезъ данную точку M* (черт. 354).

Отбросимъ на время требованіе, чтобы окружность проходила черезъ точку M. Тогда вопросу будетъ удовлетворять безчисленное множество окружностей, которыхъ центры лежатъ на биссектриссѣ BD. Построимъ одну изъ такихъ окружностей, напр. ту, которой центръ есть o. Возьмемъ на ней точку m, *сходственную* точкѣ M, т. е. лежащую на лучѣ подобія MB, и проведемъ радіусъ mo. Если теперь построимъ $MO \parallel mo$, то точка O будетъ центромъ искомаго круга. Дѣйствительно, проведя къ сторонѣ AB перпендикуляры ON и on, мы получимъ подобные тр.-ки MBO и mBo, NBO и nBo, изъ которыхъ будемъ имѣть:

$$MO:mo = BO:Bo$$

$$NO:no = BO:Bo$$

$$\text{Откуда } MO:mo = NO:no$$

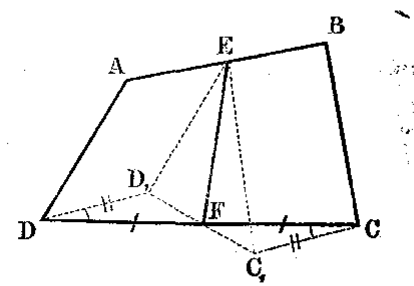
Но $mo = no$; слѣд. и $MO = NO$, т.-е. окружность, описанная изъ центра O радіусомъ OM, будетъ касаться стороны AB; а такъ какъ ея центръ лежитъ на биссектриссѣ угла, то она коснется и стороны BC.

Если за сходственную точку возмемъ другую точку m_1 пересѣченія луча BM съ окружностью o, то найдемъ другой центръ O_1 искомаго круга. Слѣд., задача допускаетъ два рѣшенія.

3. Методъ параллельнаго перенесенія. Весьма часто бываетъ полезно перемѣстить нѣкоторыя части данной или искомой фигуры въ другое положеніе, при которомъ легче обнаружить зависимость между данными элементами и искомыми. Существуютъ различные пріемы такого перемѣщенія. Разсмотримъ сначала *параллельное перенесеніе.*

Задача. *Построить четыреугольникъ $ABCD$, зная всѣ его стороны и прямую EF, соединяющую средины противоположныхъ сторонъ AB и CD.*

Чтобы сблизить между собою данныя линіи, перенесемъ параллельно самимъ себѣ стороны AD и BC въ положенія ED_1 и EC_1. Тогда прямая DD_1 будетъ равна и параллельна AE, а прямая CC_1 равна и параллельна EB; но такъ какъ $AE = EB$, то $DD_1 = CC_1$ и $DD_1 \parallel CC_1$. Вслѣдствіе этого тр.-ки DD_1F и CC_1F будутъ равны (такъ какъ у нихъ: $DD_1 = CC_1$, $DF = CF$ и $\angle D_1DF = FCC_1$); значитъ, $\angle D_1FD = \angle CFC_1$, и потому линія D_1FC_1 должна быть



Черт. 355

прямая, т.-е. фигура ED_1FC_1 окажется треугольникомъ. Въ этомъ тр.-кѣ извѣстны двѣ стороны ($ED_1 = AD$ и $EC_1 = BC$) и медіана EF, проведенная къ третьей сторонѣ. По этимъ даннымъ легко построить тр.-къ (если продолжимъ медіану EF за точку F на длину, равную ей, и полученную точку соединимъ съ D_1 и C_1, то получимъ параллелограммъ, у котораго извѣстны стороны и одна діагональ).

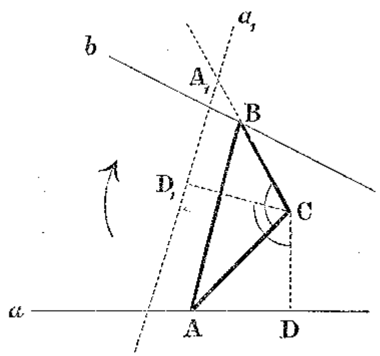
Найдя $\triangle ED_1C_1$, строимъ затѣмъ тр.-ки D_1DF и C_1CF, а затѣмъ и весь четыреугольникъ $ABCD$.

Замѣтимъ, что иногда бываетъ полезно перенести параллельно данному направленію цѣлую фигуру, напр.: окружность. Въ этомъ случаѣ всѣ точки перемѣщаемой фигуры описываютъ параллельныя и равныя прямыя (см., напр., задачу 383).

4. Методъ вращенія вокругъ точки. Для уясненія этого особеннаго вида перенесенія приведемъ слѣдующій примѣръ:

Задача. *Даны по положенію точка C и двѣ неопредѣленныя прямыя a и b. Построить треугольникъ ABC, котораго одна вершина была бы въ C, а двѣ другія лежали бы на прямыхъ a и b, и который кромѣ того былъ бы подобенъ данному треугольнику* (не помѣщенному на чертежѣ).

Пусть задача рѣшена. Замѣтивъ, что углы искомаго тр.-ка даны, обозначимъ одинъ изъ нихъ, который находится при точкѣ C, черезъ ω. Повернемъ всю фигуру вокругъ точки C въ направленіи, указанномъ стрѣлкою, на уголъ ω и найдемъ положеніе, которое займетъ послѣ вращенія прямая a. Для этого достаточно опустить на a перпендикуляръ CD, затѣмъ повернуть его на уголъ ω въ положеніи CD_1 и провести черезъ D_1 прямую a_1, перпендикулярную къ CD_1. Прямая a_1 и будетъ то положеніе, которое займетъ послѣ вращенія прямая a. Такъ какъ при вращеніи всѣ части фигуры повертываются на одинъ и тотъ же уголъ, то CA, послѣ вращенія, пойдетъ по CB; вслѣдствіе этого точка A упадетъ въ A_1, т.-е. въ точку пересѣченія CB съ a_1. Такъ какъ отношеніе CA къ CB, или все равно, отношеніе CA_1 къ CB, дано (пусть это будетъ $m:n$), то теперь вопросъ сведенъ къ тому, чтобы черезъ точку C провести такую прямую CA_1, которая пересѣкалась бы съ прямыми b и a_1 въ точкахъ B и A_1, удовлетворяющихъ пропорціи:



Черт. 356

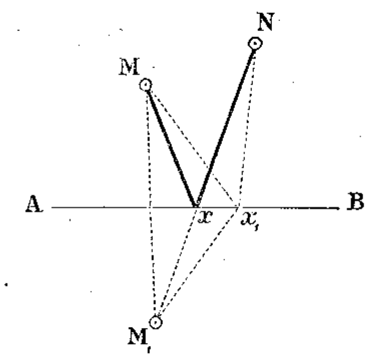
$$CA_1 : CB = m : n$$

Чтобы провести такую прямую, достаточно раздѣлить CD_1 на части въ отношеніи $m:n$ и черезъ точку дѣленія провести прямую параллельную a_1; пересѣченіе этой прямой съ b опредѣлитъ точку B.

5. Методъ вращенія вокругъ прямой (или методъ симметріи). Иногда пріемъ построенія легко обнаруживается, если перегнемъ часть чертежа вокругъ нѣкоторой прямой такъ, чтобы эта часть заняла *симметричное* положеніе по другую сторону отъ этой прямой. Приведемъ примѣръ.

Задача. *На неопредѣленной прямой AB найти такую точку x, чтобы сумма ея разстояній отъ данныхъ точекъ M и N была наименьшая.*

Если, перегнувъ чертежъ вокругъ AB, приведемъ точку M въ симметричное относительно AB положеніе M_1, то разстоянія точки M отъ какой угодно точки прямой AB сдѣлается равнымъ разстоянію точки M_1 отъ той же точки прямой AB. Поэтому суммы $Mx+xN$, Mx_1+x_1N.... равны соотвѣтственно суммамъ M_1x+xN, $M_1x_1+x_1N$...; но изъ послѣднихъ суммъ наименьшая будетъ та, при которой линія M_1xN окажется прямою. Отсюда становится яснымъ пріемъ построенія.



Черт. 357

То же самое построеніе рѣшаетъ и другую задачу: *на прямой AB найти такую точку x, чтобы прямыя xM и xN, проведенныя отъ нея къ даннымъ точкамъ M и N, составляли съ AB равные углы.*

6. Методъ обратности. Иногда бываетъ полезно, такъ сказать, перевернуть задачу, т.-е. данныя условія задачи взять за искомыя и наоборотъ. Примѣромъ служитъ слѣдующая задача.

Задача. *Въ данный треугольникъ ABC вписать другой треугольникъ, у котораго стороны были бы параллельны сторонамъ другого даннаго треугольника MNP.*

Перевернемъ вопросъ: опишемъ около тр.-ка MNP другой тр.-къ $A_1B_1C_1$, у котораго стороны были бы параллельны сторонамъ тр.-ка ABC (что, конечно, легко выполнить). Тогда мы получимъ фигуру, подобную искомой; раздѣливъ затѣмъ какую-нибудь сторону тр.-ка ABC на двѣ части, пропорціанальныя отрѣзкамъ сходственной стороны т.-ка $A_1B_1C_1$, мы получимъ одну изъ вершинъ искомаго тр.-ка.

Примѣры задачъ, рѣшаемыхъ этими методами.

1⁰. *Методъ геометрическихъ мѣстъ.*

367. Построить четыреугольникъ $ABCD$, около котораго можно было бы описать окружность, зная его стороны AB и BC, діагональ AC и уголъ между діагоналями.

368. Построить треугольникъ по основанію, углу при вершинѣ и суммѣ или разности квадратовъ двухъ другихъ сторонъ (напр., основаніе b, уголъ при вершинѣ A, и сумма квадратовъ боковыхъ сторонъ k^2).

369. Около равносторонняго треугольника описать квадратъ такъ, чтобы обѣ фигуры имѣли общую вершину.

370. Найти точку, изъ которой три отрѣзка данной прямой: AB, BC и CD были бы видны подъ равными углами.

371. Внутри тр.-ка найти такую точку, которой разстоянія до сторонъ тр.-ка относились бы между собою, какъ 6:3:2.

372. Найти точку изъ которой три данные круга были бы видны подъ равными углами (*указаніе:* надо сначала найти геометр. мѣсто точекъ, изъ которыхъ *два* данные круга видны подъ равными углами).

373. Дана окружность и какія-нибудь двѣ прямыя. Найти на окружности такую точку, чтобы сумма ея разстояній отъ этихъ прямыхъ была наименьшая.

374. Превратить данный тр.-къ въ равновеликій другой тр.-къ съ даннымъ основаніемъ и съ даннымъ угломъ при вершинѣ.

375. Въ данной окружности провести двѣ хорды данной длины такъ, чтобы онѣ пересѣкались подъ даннымъ угломъ и одна изъ нихъ проходила черезъ данную точку.

2⁰. *Методъ подобія.*

376. Построить тр.-къ по углу при вершинѣ, высотѣ и отношенію отрѣзковъ, на которыя основаніе дѣлится высотою.

377. Вписать квадратъ въ данный тр.-къ, въ данный секторъ, въ данный сегментъ.

378. Черезъ данную точку провести прямую такимъ образомъ, чтобы три данныя прямыя, исходящія изъ одной точки, отсѣкали отъ искомой прямой отрѣзки, находящіеся въ даномъ отношеніи.

379. Черезъ данную точку A окружности провести хорду AD, которая пересѣкалась бы съ данною хордою BC въ такой точкѣ E, чтобы прямыя DE и DC находились въ данномъ отношеніи.

380. Провести *внутри тр.-ка прямую, параллельную основанію, такъ,* чтобы эта прямая была средней пропорціональной между отрѣзками одной боковой стороны.

381. Построить равнобедренный тр.-къ, зная его боковую сторону и сумму высоты съ основаніемъ.

382. На данной прямой найти такую точку, чтобы ея разстоянія отъ данной точки и другой данной прямой находились въ данномъ отношеніи.

3⁰. *Методъ параллельнаго перенесенія.*

383. Между двумя данными окружностями провести прямую данной длины a параллельно данной прямой MN.

(Указаніе: Надо одинъ кругъ приблизить къ другому, перенеся его параллельно прямой MN на разстояніе a).

384. Въ кругѣ даны двѣ хорды AB и CD. Найти на окружности такую точку x, чтобы прямыя xA и xB отсѣкали отъ хорды CD отрѣзокъ, равный данной длинѣ (мет. парал. пересѣченія и геом. мѣстъ).

385. Въ данномъ тр.-кѣ ABC найти такія точки: x на сторонѣ AB и y на сторонѣ BC, чтобы прямая xy была данной длины и кромѣ того отношеніе $Ax : Cy$ было бы данное (парал. перенесеніе и методъ подобія).

386. Построить трапецію по одному ея углу, двумъ діагоналямъ и средней линіи.

387. Построить четыреугольникъ по тремъ сторонамъ a, b и c и двумъ угламъ α и π, прилежащимъ къ неизвѣстной сторонѣ.

388. Къ двумъ даннымъ кругамъ провести общую сѣкущую, параллельную данной прямой такъ, чтобы сумма или разность хордъ, опредѣляемыхъ точками перенесенія, была равна данной длинѣ.

389. Съ корабля видны два маяка, положеніе которыхъ на картѣ извѣстно, подъ даннымъ угломъ. Когда корабль прошелъ извѣстную длину въ данномъ направленіи, тѣ же самые маяки видны подъ другимъ даннымъ угломъ. Опредѣлить на картѣ мѣсто корабля (геом. мѣсто и параллельное *перенесеніе*).

4⁰. *Методъ вращенія вокругъ точки.*

390. Построить тр.къ, подобный данному тр.-ку, такъ, чтобы одна его вершина лежала въ данной точкѣ A, а двѣ другія вершины находились бы на данныхъ окружностяхъ O и O_1 (одна на O, другая на O_1).

391. Данъ кругъ и внѣ его двѣ точки A и B; провести къ кругу касательную такъ, чтобы разстоянія точки A до этой касательной и до перпендикуляра, опущеннаго изъ B на касательную, были въ данномъ отношеніи.

(Указаніе: надо повернуть вокругъ точки A на 90⁰ прямоугольный т.-къ, у котораго гипотенуза есть AB, а одинъ катетъ—разстояніе точки A до перпендикуляра, опущеннаго на касательную изъ точки B. Эту же задачу можно рѣшить при помощи одновременнаго пользованія методомъ подобія и методомъ геометр мѣстъ).

392. Построить тр.-къ, котораго стороны были бы пропорціанальны числамъ 3, 4 и 5, и котораго вершины лежали бы на трехъ данныхъ параллельныхъ прямыхъ.

5⁰. *Методъ вращенія вокругъ прямой.*

393. Построить по четыремъ сторонамъ четыреугольникъ $ABCD$, зная, что его діагональ AC дѣлитъ уголъ A пополамъ.

394. Конечная прямая AB пересѣчена въ точкѣ C прямой MN; найти на MN такую точку, изъ которой отрѣзки AC и CB видны подъ равными углами (эту задачу можно также рѣшить методомъ геометр. мѣстъ).

395. Построить квадратъ, двѣ противоположныя вершины котораго находились бы на двухъ данныхъ окружностяхъ, а двѣ другія на данной прямой, расположенной между окружностями.

396. На прямоугольномъ билліардѣ дано положеніе двухъ шаровъ A и B. Въ какомъ направленіи надо толкнуть шаръ A, чтобы онъ, отразившись послѣдовательно отъ всѣхъ четырехъ бортовъ, ударилъ затѣмъ шаръ B.

397. Данъ уголъ и внутри его точка. Построить тр.-къ наименьшаго периметра такой, чтобы одна его вершина лежала въ данной точкѣ, а двѣ другія на сторонахъ угла.

398. Рѣшить методомъ симметріи задачу, которая выше была рѣшена методомъ подобія: въ данный уголъ вписать окружность, которая проходила бы черезъ точку, данную внутри угла.

6⁰. *Методъ обратности.*

399. Въ даннный секторъ вписать тр.-къ, равный данному тр.-ку.

400. Построить тр.-къ, равный данному тр.-ку, такъ, чтобы его вершины лежали на трехъ данныхъ прямыхъ, исходящихъ изъ одной точки.

401. Построить тр.-къ, подобный данному тр.-ку, такъ, чтобы его вершины лежали на трехъ данныхъ концентрическихъ окружностяхъ.

402. Въ данный тр.-къ вписать тр.-къ, подобный другому данному тр.-ку, такъ, чтобы одна изъ его вершинъ лежала въ точкѣ, данной на основаніи.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Цыфры означаютъ нумера страницъ.

ПЛАНИМЕТРІЯ.

КНИГА I. ПРЯМАЯ ЛИНІЯ.

КНИГА II. ОКРУЖНОСТЬ.

КНИГА III. ПОДОБНЫЯ ФИГУРЫ.

КНИГА IV. ОПРЕДѢЛЕНІЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ И ЕЯ ЧАСТЕЙ.

КНИГА V. ИЗМѢРЕНІЕ ПЛОЩАДЕЙ.

СТЕРЕОМЕТРІЯ.

КНИГА I. ПРЯМЫЯ И ПЛОСКОСТИ.

КНИГА II. МНОГОГРАННИКИ.

КНИГА III. КРУГЛЫЯ ТѢЛА.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стр. 8, строка 6 снизу, напечатано: какія-нибудя; слѣдуетъ: какія-нибудь.

Стр. 15, строка 3, напечатано: $AOB+BOD+2d$; слѣдуетъ: $AOB+BOD=2\ d$.

Стр. 52, строка 1, напечатано: ино прямые; слѣдуетъ: они прямые.

Стр. 57, строка 14 снизу, напеч.: такъ у нихъ; слѣдуетъ: такъ какъ у нихъ.

Стр. 126, напечатано: **Теорема.** *Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорціанальная между гипотенузой и прилежащимъ отрѣзкомъ.*

Слѣдуетъ: **Теорема.** *Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорціанальная между отрѣзками гипотенузы, а каждый катетъ есть средняя пропорціанальная между гипотенузой и прилежащимъ отрѣзкомъ.*

Стр. 131, строка 6 снизу, напечатано: $a=5$ $c=3$; слѣдуетъ: $a=5$, $b=4$, $c=3$.

Стр. 146, напечатано: глава IV; слѣдуетъ: глава V.

Стр. 150, строка 5, напечатано: съ биссекрисой; слѣдуетъ: съ биссектриссой.

Стр. 155, строка 9 снизу, напечатано: R 2; слѣдуетъ: 2 R.